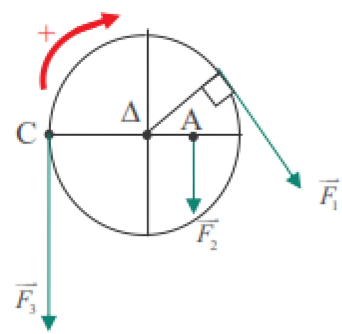
تصحيح تمارين توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

تمرين 1:

حساب عزم كل قوة :



$$M_\Delta(\vec{F}_1) = F_1.R \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}_1) = 2 \times 20.10^{-2} = 0{,}4N.m$$
$$M_\Delta(\vec{F}_2) = F_2.\frac{R}{2} \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}_2) = 1 \times 10.10^{-2} = 0{,}1N:m$$
$$M_\Delta(\vec{F}_3) = -F_3 \quad .R = -2{,}5 \times 20.10^{-2} = -0{,}5N.m$$

2- مجموع عزوم القوى المطبقة على العاضة :

تضع العارضة الى القوى الثلاث ووزنها $\vec{P}$: و المحور:$\vec{R}$.

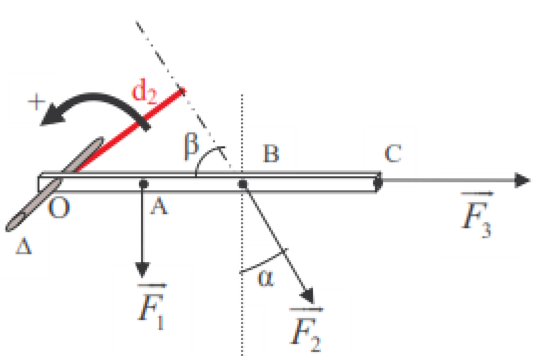
بما أن: $M_\Delta(\vec{P}) = 0$ و$M_\Delta(\vec{R}) = 0$لأن خط تأثير القوتان يمر من محور الدوان Δ .

مبرهنة العزوم تكتب :

$$\sum \vec{F} = M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{F}_1) + M_\Delta(\vec{F}_2) + M_\Delta(\vec{F}_3)$$
$$\sum \vec{F} = 0 + 0 + 0{,}4 + 0{,}1 - 0{,}5 = 0$$

وبالتالي مبرهنة العزوم تتحقق .

تمرين 2:



1- حساب عزم كل قوة بالنسبة لمحور الدوران Δ:

$$M_\Delta(\vec{F}_1) = -F_1.OA$$

ت.ع: $M_\Delta(\overrightarrow{F_1}) = -17 \times 16.10^{-2} = -2,72N.m$

$$M_\Delta(\vec{F_2}) = -F_2.d_2$$

$$sin\beta = \frac{d_2}{OB} \Rightarrow d_2 = OBsin\beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \propto$$

$$M_\Delta(\vec{F_2}) = -F_2.OB.\sin(\frac{\pi}{2} - \propto))$$

ت.ع: $M_\Delta(F_2) = -25 \times 37.10^{-2} \times \sin(90° - 30°) = -8,01N.m$

$$M_\Delta(\vec{F_3}) = 0$$

لأن خط تأثير القوة $\overrightarrow{F_3}$ يقاطع محور الدوران Δ .

2- حساب مجموع عزوم القوى:

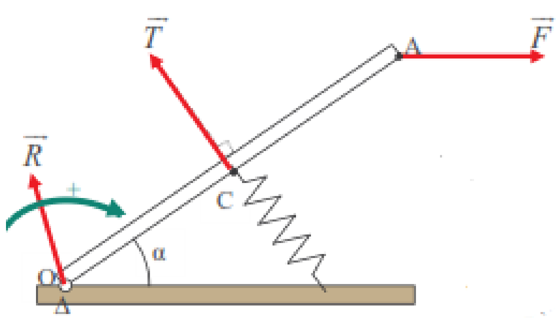
باعتبار وزن العارضة مهمل نكتب :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F_1}) + M_\Delta(\vec{F_2}) + M_\Delta(\overrightarrow{F_3})$$

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = -2,72 - 8,01 + 0 = -10,73N.m$$

بماأن مجموع عزوم القوى المطبقة على العارضة غير منعدم فإن العارضة لا توجد في حالة توازن

تمرين 3:



- جرد القوى :

تخضع العارضة OAلثلاث قوى :

- القوة $(A,\vec{F})$
- القوة $(C,\vec{T})$ المطبقة من طرف النابض ،اتجاها عمودي على العارضة ومنحاها نحو الأعلى لأن النابض مضغوط .
- القوة $(B,\vec{R})$ المطبقة من طرف المحور Δ.

2- حساب شدة توتر النابض :

-3

العارضة في توازن مبرهنة العزوم نكتب :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = 0 \Rightarrow M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{F}) + M_\Delta(\vec{T}) = 0$$

نختار المنحى الموجب للدوران كما يبين الشكل .

لدينا : $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن خط تاثير هذه القوة يتقاطع مع محور الدوران Δ

$$\sin\propto=\frac{d}{L} \Rightarrow d = L\sin\propto \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = F.L.\sin\propto$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = -Td' = -T\frac{L}{2}$$

مبرهنة العزوم تصبح :

$$0+F.L.\sin - T\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 2F\sin\propto$$

تطبيق عددي :

T=2x20xsin(30°)=20N

3- استنتاج صلابة النابض :

نعلم أن توتر النابض يكتب :

$T=k|\Delta\ell|$ حيث k صلابة النالض و $\Delta\ell$ تقلص النابض $\Delta\ell=-8cm<0$

$$k = \frac{T}{|\Delta\ell|} = \frac{20}{8.10^{-2}} = 125N/kg$$

تمرين 4:

- بالنسبة للمحاولة الأولى :

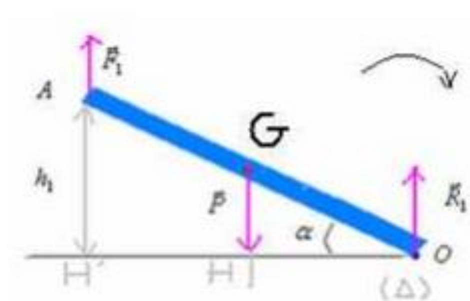
1-1- القوى المطبقة على العارضة عند التوازن :

$\vec{P}$: وزن العارضة وهي قوة عن بعد .

$\vec{F}_1$: القوة المطبق من طرف العامل على العارضة في النقطة A وهي قوة تماس .

$\vec{R}_1$: القوة المطبقة من طرف الأرض على العارضة في النقطة O وهي قوة التماس .

أنظر الشكل :



1-2- تعابير عزوم القوى بالنسبةللمحور Δ المار من O نقطة الإرتكاز :

$M_{\Delta}(\vec{R}_1) = 0$ لان خط تأثير القوة $\overrightarrow{R_1}$ يمر من محور الدوران .

$$M_{\Delta}(\vec{P}) - P.OH$$

تعبير OH لدينا : $\cos\alpha = \frac{OH}{OG}$ مع $OG=\frac{L}{2}$ ومنه : $OH=OG.\cos\alpha=\frac{L}{2}\cos\alpha$

$$M_\Delta(\vec{P}) = -P.\frac{L}{2}.\cos\alpha$$

$$M_\Delta(\vec{F}_1) = F_1.OH'$$

تعبير OH′ لدينا : $\cos\alpha = \frac{OH'}{OA} = \frac{OH'}{L}$ ومنه : $OH'=L.\cos\alpha$

$$M_\Delta(\vec{F}_1) = F_1.L.\cos\alpha$$

3-1- نبين أن : $F_1 = \frac{P}{2}$

بما أن العارضة في توازن فإن مبرهنة العزوم تتحقق :

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}_1) + M_\Delta(\vec{F}_1) = 0$$

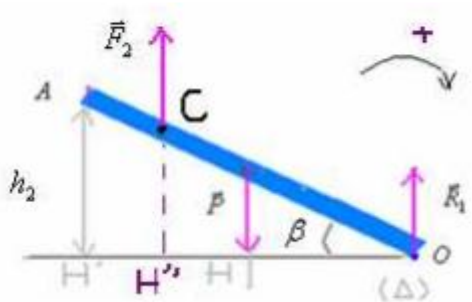
$$-P.\frac{L}{2}\cos\alpha + 0 + F_1.L.\cos\alpha = 0$$

$$F_1.L.\cos\alpha = P.\frac{L}{2}.\cos\alpha$$

نستنتج: $F_1=\frac{P}{2}$

نستنتج أنه عندما تصبح شدة القوة F_1 مساوية لنص وزن العارضة تصبح هذه الأخيرة في توازن .

3-بالنسبة للمحاولة الثانية :



$M_\Delta(\vec{R}_2) = 0$ لأن خط تأثير القوة $\vec{R}_2$ يمر من المحور

$M_\Delta(\vec{P}) = -P.OH$ مع : $\cos\beta = \frac{OH}{OG}$ و $OG=\frac{L}{2}$ أي : $OH=OG.\cos\beta = \frac{L}{2}\cos\beta$

$$M_\Delta(\vec{P}) = -P.\frac{L}{2}.\cos\beta$$

$M_\Delta(\vec{F}_2)=F_2.OH''$ مع: $\cos\beta=\frac{OH''}{OC}$ و $OC=\frac{3}{4}L$ أي: $OH''=OC.\cos= \frac{3}{4}L.\cos\beta$

$$M_\Delta(\vec{F}_2) = \frac{3}{4}F_2L\cos\beta$$

3-1- العارضة في توازن وباتالي يكون المجموع الجبري لعزوم القوى منعدم .

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\overrightarrow{R_2}) + M_\Delta(\overrightarrow{F_2}) = 0$$

$$-P.\frac{L}{2}\cos\beta + 0 + \frac{3}{4}F_2.L.\cos\beta = 0$$

$$\frac{3}{4}F_2.L.\cos\beta = \frac{1}{2}P.L.\cos\beta$$

$$F_2=\frac{2}{3}P$$

نستنتج أنه كلما اقتربنا من محور الدوران كلما ازدادت شدة القوة التي يطبقها العامل.

2-3- حساب h_2 :

لدينا : (1) $\sin\propto = \frac{h_1}{L}$

و (2) $\sin\beta = \frac{h_2}{L}$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{h_2}{L} \times \frac{L}{h_1}$$

$$h_2 = h_1\frac{\sin\beta}{\sin\propto}$$

ت.ع: $h_2=60x\frac{\sin(30°)}{\sin(60°)}$

$$h_2=34,6cm$$

تمرين 5 :

1- جرد القوى :

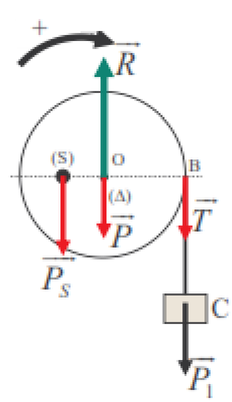
يوجد القرص في توازن تحت تأثير ثلاث قوى :

$\vec{P}$: وزنه .

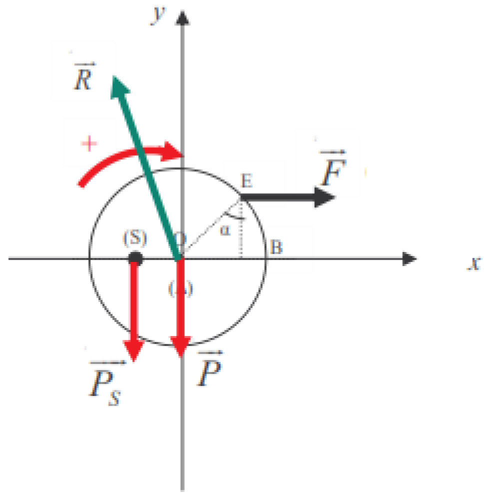
$\vec{R}$: تأثير محور الدوران Δ .

$\vec{T}$: توتر الخيط .

$\overrightarrow{P_S}$: وزن الجسم S .



2- تحديد العلاقة بين m وm_1 :



بماأن القرص في توازن فإن مبرهنة العزوم تكتب :

$\sum M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{P_S}) + M_\Delta(\vec{T}) = 0$ (1)

$M_\Delta(\vec{P}) = 0$ ، $M_\Delta(\vec{R}) = 0$

$M_\Delta(\vec{P_S}) = -P_S.\frac{r}{2} = -mg\frac{r}{2}$

$M_\Delta(\vec{T}) = +Tr$

توازن الجسم C يمكننا من كتابة : $T=P_1=m_1.g$

$M_\Delta(\vec{T})=m_1.g.r$

العلاقة (1) تكتب :

$0+0-mg\frac{r}{2} + m_1gr = 0$

$mg\frac{r}{2} = m_1gr$

$m=2m_1$

$m_1=2x20=40g$

1-3 تعبير عزم القوة $\vec{F}$:

$M_\Delta(\vec{F}) = +Fd$

$Cos\propto = \frac{d}{r} \Rightarrow d = rcos \propto$

$M_\Delta(\vec{F}) = F.r.cos \propto$

2-3 مبرهنة العزوم تكتب :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = 0 \Rightarrow M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{P_S}) + M_\Delta(\vec{F}) = 0 \quad (1)$$

$M_\Delta(\vec{R}) = 0$ و $M_\Delta(\vec{P}) = 0$

المعادلة (1) تكتب :

$$0+0-mg\frac{r}{2} + Fr\cos\alpha = 0$$

$$F\cos\alpha = \frac{1}{2}mg$$

$$F=\frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{40.10^{-3}\times 10}{2\cos(60°)}$$

$$F=0,4N$$

3-3 تحديديمميزات القوة $\vec{R}$:

حسب الشرط الأول لسكون مركز قصور القرص :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{P_S} + \vec{F} = \vec{0}$$

اسقاط العلاقة على المحور Ox :

$$P_x + R_x + P_{Sx} + F_x = 0$$

مع : $P_x=0$ و $P_{Sx}=0$ و $F_x=F$ ومنه $R_x+F=0$ أي $R_x=-F$

اسقاط العلاقة على المحور Oy :

$$P_y + R_y + P_{Sy} + F_y = 0$$

مع : $P_y=-P$ و $P_{Sy}=-P_S$ و $F_y=0$ ومنه $0+R_y-P_S-P=0 \Leftarrow R_y=P_S+P$

منظم $\vec{R}$:

$$R=\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{F^2 + (P+P_S)^2}$$

تطبيق عددي :

$$R=\sqrt{0,4^2 + (1 + 40.10^{-3} \times 10)^2} = 1,46N$$

اتجاه $\vec{R}$ يكزن زاوية β مع المحور Oyبحيث :

$$\tan\beta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{F}{P+P_S}$$

$$\tan\beta = \frac{0,4}{1+40.10^{-3}\times 10} = 0,29 \Rightarrow \beta = 15,9°$$

مميزات القوة $\vec{R}$:

- نقطة التأثير : O
- خط التأثير : يكون زاوية β مع الخط الرأسي المار من O .
- المنحى : نحو الأعلى .
- الشدة : R=1,46N

تمرين 6 :

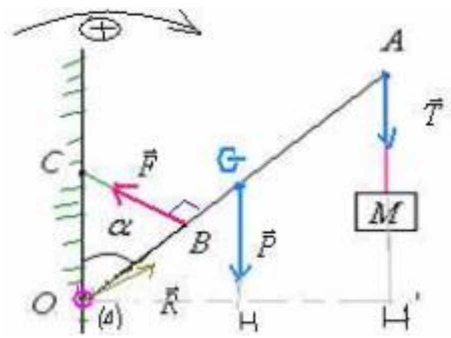
1- جرد القوى المطبقة على العارضة (OA) :

$\vec{P}$: وزن العارضة .

$\vec{T}$: القوة المطبقة من طرف الخيط في النقطة A .

$\vec{F}$: القوة المطبقة من طرف الحبل الحديدي في النقطة B .

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران (Δ) في النقطة O .



دراسة توازن الجسم المعلق M يمكن من كتابة T=P=Mg

$$M_\Delta(\vec{F}) = -F.OB = -F.\frac{L}{4}$$

2- إيجاد شدة القوة $\vec{F}$:

بماأنالعارضة في حالة توازن ، فإن مبرهنة العزوم تكتب :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_\Delta(\vec{F}) + M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

من خلال توازن الجسم المعلق M فإن T=P=mg

$$M_\Delta(\vec{F}) = -F.OB = -F.\frac{L}{4}$$

$$M_\Delta(\vec{P}) = P.OH = P.\frac{L}{2}.\sin\propto = Mg.\frac{L}{2}.\sin\propto$$

$$M_\Delta(\vec{T}) = T.OH = T.L.\sin\propto = mg.L.\sin\propto$$

$$M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

مبرهنة العزوم تصبح :

$$Mg.\frac{L}{2}.\sin\propto + mg.L.\sin\propto - F.\frac{L}{4} + 0 = 0$$

$$F.\frac{1}{4} = \frac{Mg}{2}\sin\propto + mg\sin\propto$$

$$F = 4(\frac{Mg}{2}\sin\propto + mg\sin\propto)$$

F=g.sin∝ $(2M + 4m)$
F=2g.sin∝ $(M + 2m)$
ت.ع: F=10.sin(30°)(2+2x3)=80N

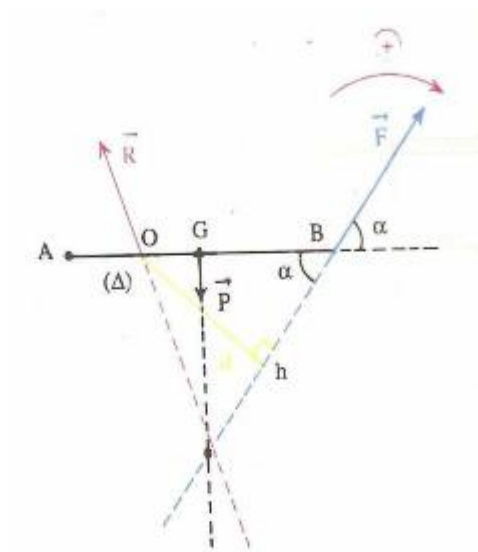
تمرين 7 :

لتحديد قيمة القيمة m المعلقة بالخيط ندرس توازن القضيب AB الذي يخضع للقوى التالية :

تأثير الأرض : $\vec{P}$

تأثير المحور (Δ) : $\vec{R}$

تأثير الخيط : $\vec{F}$



حسب مبرهنة العزوم نكتب :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

لدينا : $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن $\vec{R}$ تقاطع محور الدوران .

كما أن : $M_{\Delta}(\vec{P}) = P.OG = P.\frac{AB}{2}$

و : $M_{\Delta}(\vec{F}) = -F.d$

مع d=OH و OH = OB.sin∝ ⇐ sin∝= $\frac{OH}{OB}$

F هي دة وزن الكتلة المعلقة لأن البكر تغير اتجاه القوة دون تغيير شدتها .

إذنF=mg : $M_{\Delta}(\vec{F}) = -mg.OB.sin\alpha$

مبرهنة العزوم تكتب :

P.OA-mg.OB.sin∝=0⇐mg.OB.sin$\alpha = P.OA$

$$m=\frac{P.OA}{g.OB.sin\propto}$$

نعلم أن : $OG=\frac{AB}{2}$ و $OB=AB-OA$

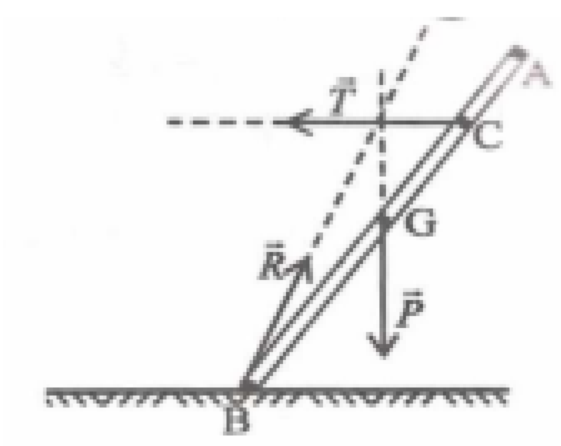
تعبير m يصبح :

$$m=\frac{P(\frac{AB}{2}-OA)}{g(AB-OA)sin\alpha}=\frac{40(\frac{80}{2}-20)}{10(80-20)sin30°}=2{,}72kg$$

تمرين 8 :

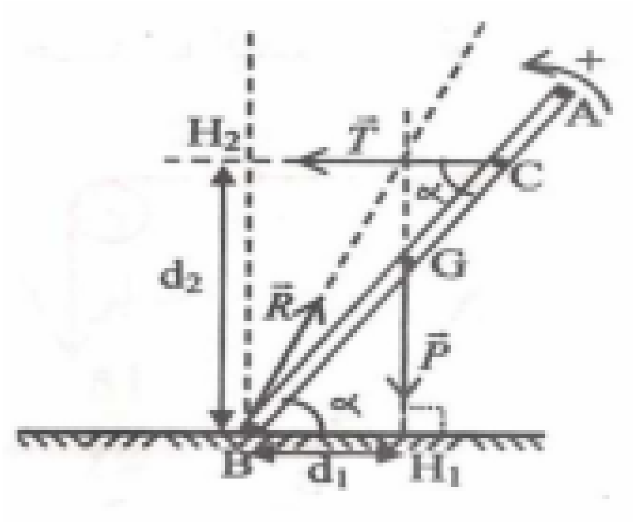
1- جرد القوى :
تخضع الساق لثلاث قوى :
- وزن الساق $\vec{P}$
- القوة المطبقة من طرف النابض : $\vec{T}$
- القوة المطبقة من طرف المحور (Δ) : $\vec{R}$

2- تمثيل اتجاهات القوى :
بما لأن الساق في توازن فإن خطوط تأثير القوى الثلاث متلاقية في نقطة واحدة
- مثل أولا خط تأثير الوزن $\vec{P}$ وهو رأسي ومار من G .
- نمثل ثانيا خط تأثير $\vec{T}$ وهو أفقي مار من C و I .
- وأخيرا نمثل $\vec{R}$ يمر من B وI نقطة تلاقي جميع خطوط التأثير .



3- أثبات تعبير توتر النابض T :
الساق في توازن ، حسب شرط التوازن نكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{P})+M_{\Delta}(\vec{T})+M_{\Delta}(\vec{R})=0(1)$$



$M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن اتجاه $\vec{R}$ يقطع محور الدوران .

$M_\Delta(\vec{P})=-Pd_1$

$\cos\propto=\frac{d_1}{BG} \Rightarrow d_1 = BG.\cos\propto$

$$M_\Delta(\vec{P}) = -mg.BG.\cos\propto$$

$$M_\Delta(\vec{T}) = T.d_2$$

$\sin\propto=\frac{d_2}{BC} \Rightarrow d_2 = BC.\sin\propto$

$$M_\Delta(\vec{T}) = T.BC.\sin\propto$$

العلاقة (1) تكتب :

$-mg.BG.\cos\propto + T.BC.\sin\propto + 0 = 0$

نعلم أن : $BG=\frac{L}{2}$ و $BC = \frac{L}{3}$

$-mg\frac{L}{2}\cos\propto+T\frac{L}{3}\sin\propto= 0$

$$-\frac{1}{2}mg\cos\propto + \frac{1}{3}T\sin\propto= 0$$

$$\frac{1}{3}T\sin\propto= \frac{1}{2}mg.\cos\propto$$

$$T=\frac{3}{2}\frac{mg.\cos\propto}{\sin\propto} = \frac{3\times0,82\times10\sin45°}{2\sin45°}=12,3N$$

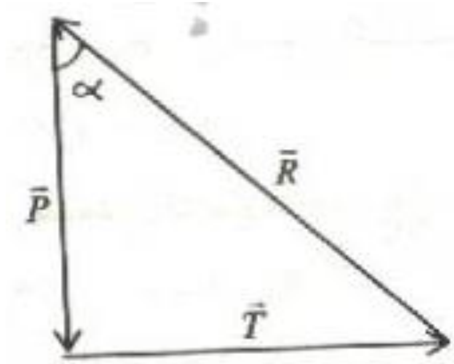
4- صلابة النابض :

$$T=k\Delta\ell \Rightarrow k=\frac{T}{\Delta\ell}=\frac{12{,}3}{6.10^{-2}}=\frac{205N}{m}$$

T=2,05.10²N/m

4- مميزات القوة $\vec{R}$:

بما ان القوتين $\vec{P}$ و $\vec{T}$ متعامدان فإن الخط المضلعي هو كالتالي :



نمثل القوى بدون سلم .

مميزات القوة $\vec{R}$:

- نقطة التأثير : B
- خط التأثير : الإتجاه يكون زاوية ∝ مع الخط الر اسي ، حيث : $\tan\propto=\frac{T}{P}=\frac{12{,}3}{0{,}82\times10}=1{,}5$
  ومنه : $\propto=56{,}3°$
- المنحى : الى الأعلى نحو اليسار .
- الشدة : $R=\sqrt{P^2+T^2}=\sqrt{12{,}3^2+8{,}2^2}=14{,}8N$

تمرين 9:

1- جرد القوى :

يخضع القرص للقوى التالية :

- وزنه : $\vec{P}$
- تأثير السلك : $\vec{R}$
- المزدوجة : $(F_1,\vec{F}_2)$
- مزدوجة اللي التي تقاوم السلك :

2- عزم مزدوجة قوتين $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$:

باعتبارالمنحى الموجب للدوران ، تعبير مزدوجة قوتين هو :

$$M_\Delta(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=F_1.d=F_2.d$$

الشدة المشتركة للقوتين : $F=F_1=F_2$ و $d=AB=2r$

$$M_\Delta(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = 2F.r$$

3- تعبير M_C عزم مزدوجة اللي :

بتطبيق الشرط الثاني للتوازن ، نكتب :

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{F}_1,\vec{F}_2) + M_C = 0$$

مع : $M_\Delta(\vec{P}) = 0$ و $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن اتجاههما يمر من محور الدوران .

M_C+2F_1r=0

$$M_C = -2F_1.r$$

العزم سالب مما يدل أن مزدوجة اللي تقاوم لي السلك .

4- تعبير C ثابتة لي السلك :

لدينا : $M_\Delta = -2F_1.r$ و $M_\Delta = -C\theta$ ومنه : $-C\theta = -2F_1r$

$$C = \frac{2F_1r}{\theta} \Leftarrow$$

5.1- حساب قيمة C :

بما أن : $M_\Delta = -C\theta \Leftarrow C = -\frac{M_\Delta}{\theta}$

مبيانيا نجد عند $\theta = 0,2rad$ القيمة : $M_C = 16.10^{-2}N.m$

ت.ع:

$$C = -\frac{(-16.10^{-2})}{0,2}$$ =0,8N/rad

5.2- حساب الشدة F_1 :

حسب السؤال 4 : $\Leftarrow$ $C\theta = 2F_1\mathrm{r} \Leftarrow F_1 = \frac{C\theta}{2r}$ $c = \frac{2F_1r}{\theta}$

ت.ع:

$$F_1 = \frac{0,8\times0,5}{2\times0,1} = 2\mathrm{N}$$