

EXERCICES : EQUILIBRE D'UN CORPS EN ROTATION AROUND D'UN AXE FIXE (I)

Méthode de résolution d'un problème à moments

Pour résoudre un problème faisant intervenir des forces qui agissent sur un solide mobile autour d'un axe, nous allons systématiquement appliquer la procédure suivante :

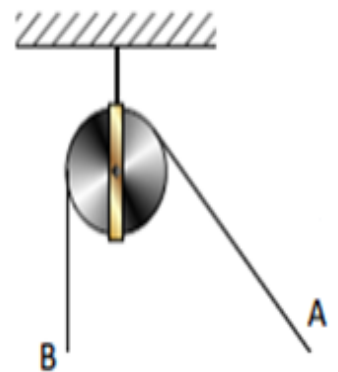
- a) Indiquer le système étudié
- b) Faire le bilan des forces
- c) Déterminer l'axe de rotation et fixer un sens positif de rotation.
- d) Exprimer le moment des différentes forces et indiquer s'il est positif ou négatif

e) Appliquez les relations suivantes: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext}) = 0$

Exercice 1

Une poulie de poids $P_0 = 20N$ est mobile sans frottement autour de son axe Δ fixe. Nous appliquons sur l'extrémité A d'une corde de poids négligeable, passant par la gorge d'une poulie, une force \vec{F} d'intensité $F = 300N$ dont la direction fait un angle de 60° avec la verticale.

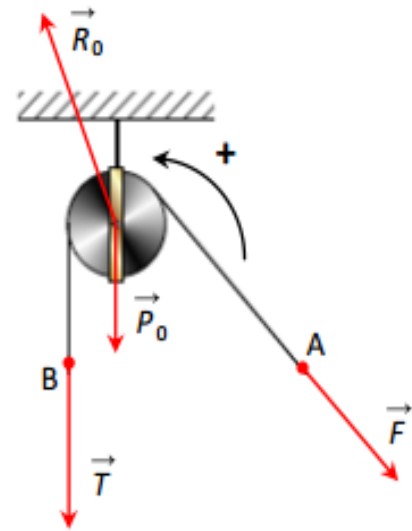
- 1) déterminer la force \vec{T} qu'il faut appliquer sur l'autre extrémité B de la corde pour réaliser l'équilibre.
- 2) déterminer alors la réaction \vec{R}_0 exercée par l'axe sur la poulie.



Réponse

1) détermination de \vec{T}

- système: l'ensemble (corde, poulie)
- bilan des forces extérieures reçues:
 - le poids \vec{P}_0 de la poulie
 - la force \vec{F} appliquée en A
 - la force \vec{T} appliquée en B
 - la réaction \vec{R}_0 exercée par l'axe.
- conditions d'équilibre:
 - immobilité de G: $\vec{P}_0 + \vec{F} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$
 - absence de rotation autour de Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$
- exploitation des relations précédentes: choisissons un sens positif (voir schéma) et évaluons les moments.



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$$

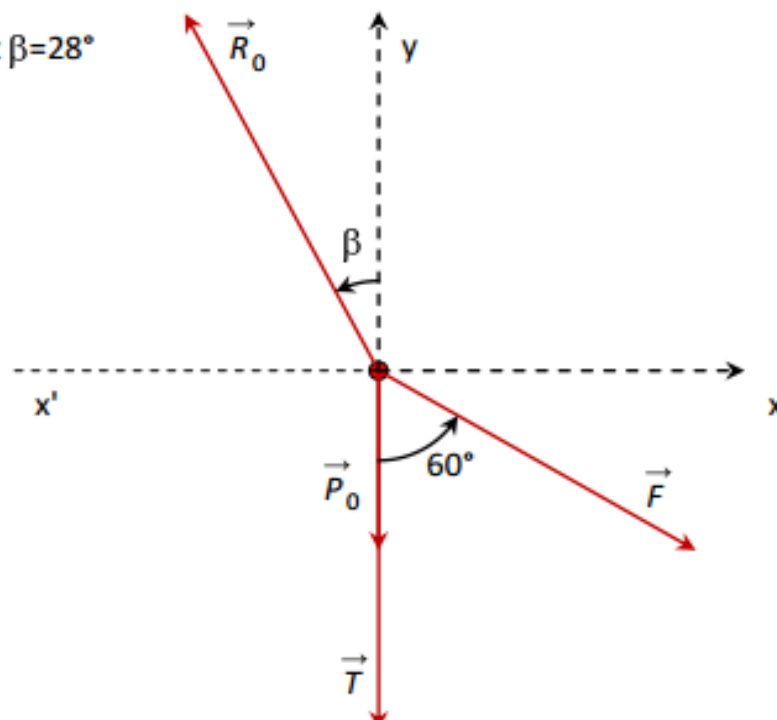
$$0 - F \times r + T \times r + 0 = 0 \Rightarrow -F \times r + T \times r = 0 \Rightarrow \boxed{T=F}$$

Les forces de part et d'autre de la poulie ont la même intensité. Seules leurs directions changent.

2) détermination de \vec{R}_0

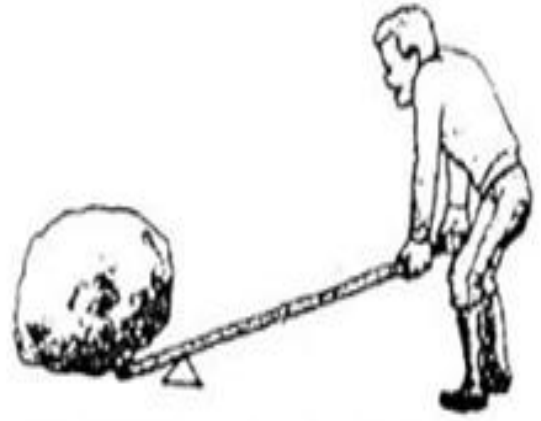
Pour déterminer \vec{R}_0 il faut projeter la relation vectorielle $\vec{P}_0 + \vec{F} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$ dans un repère.

Vérifier que $R_0 = 540N$ et $\beta = 28^\circ$



Exercice: 2

Un levier est un solide mobile autour d'un axe à l'aide duquel on peut appliquer une grande force sur un objet en exerçant une petite force sur le levier. On distingue les leviers à deux bras et les leviers à un bras.

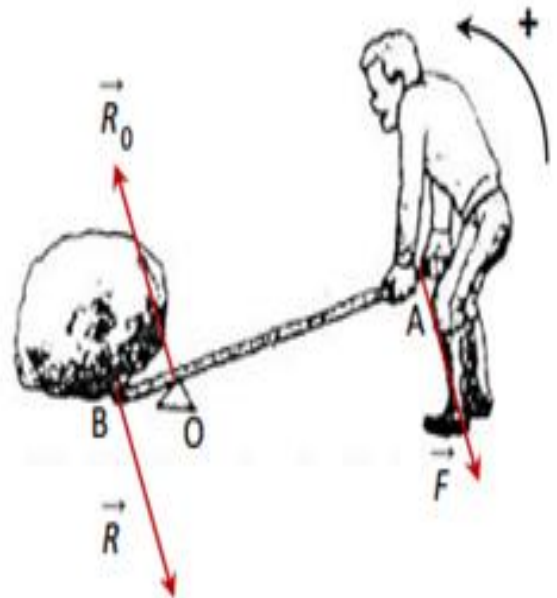


Un rocher, lorsqu'il est soulevé, exerce en A sur le levier une force résistante \vec{R} d'intensité $R = 2700N$ dont la direction est perpendiculaire à celle du levier (voir figure). Le poids du levier est négligeable. $OA = 0,1m$; $OB = 0,9m$

- 1) déterminer la force motrice de F qu'il faut appliquer orthogonalement au levier pour maintenir l'équilibre.
- 2) déterminer la réaction \vec{R}_0 de l'appui.

Réponse

- 1) détermination de \vec{T}
 - système: le levier
 - bilan des forces extérieures reçues:
 - le poids \vec{P}_0 du levier que nous négligeons.
 - la force motrice \vec{F}
 - la réaction \vec{R} exercée par le rocher
 - la réaction de l'appui \vec{R}_0



- conditions d'équilibre:
 - immobilité de G: $\vec{R} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$
 - absence de rotation autour de Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$
- exploitation des relations précédentes: choisissons un sens positif (voir schéma) et évaluons les moments.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$$

$$R \times OB - F \times OA + 0 = 0 \Rightarrow F = R \frac{OA}{OB}$$

$$\text{Numériquement: } F = 2700 \times \frac{0,1}{0,9} = 300N$$

La force motrice a une intensité beaucoup plus faible que la force résistante. Ceci est dû au rapport de bras de levier $\frac{OA}{OB}$

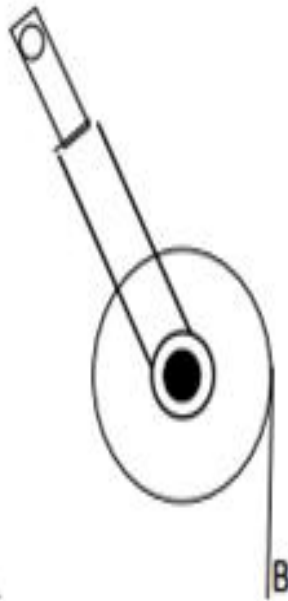
2) détermination de \vec{R}_n

Pour déterminer \vec{R}_0 il faut projeter la relation vectorielle $\vec{F} + \vec{R} + \vec{R}_0 = \vec{0}$ dans un repère. Remarquer que les forces ont la même direction: $R_0 = R + F = 2700 + 300 = 3000N$

Exercice 3

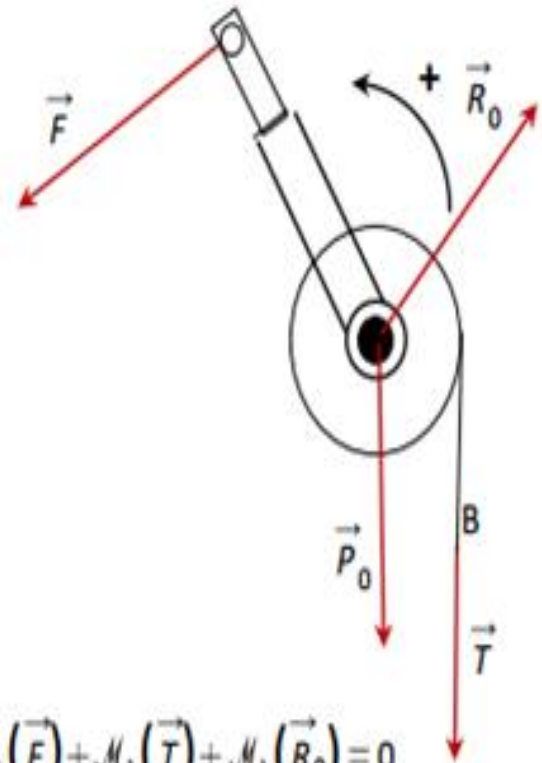
Un treuil mobile sans frottement est constitué d'un cylindre homogène de poids $P_0 = 200\text{N}$ et de rayon $r = 10\text{cm}$, et d'une manivelle de poids négligeable et de longueur $L = 40\text{cm}$. un solide exerce à l'extrémité inférieure B de la corde de masse négligeable une force d'intensité $T = 200\text{N}$.

Déterminer à l'équilibre la valeur de la force motrice F qu'il faut appliquer sur la poignée A (perpendiculairement à la manivelle) (voir figure).



Détermination de \vec{F}

- système: l'ensemble (corde, treuil)
- bilan des forces extérieures reçues:
 - le poids \vec{P}_0 de la poulie
 - la force \vec{F} appliquée en A
 - la force \vec{T} appliquée en B
 - la réaction \vec{R}_0 exercée par l'axe.
- conditions d'équilibre:
 - immobilité de G: $\vec{P}_0 + \vec{F} + \vec{T} + \vec{R}_0 = \vec{0}$
 - absence de rotation autour de Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_0) = 0$$

$$0 - F \times r + T \times r + 0 = 0 \Rightarrow -F \times L + T \times r = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{F = T \frac{r}{L}}$$

Le rapport $\frac{r}{L} = \frac{1}{4}$ d'où $F = \frac{T}{4} = 50N$. Une force relativement faible ($F=50N$) permet d'équilibrer une force relativement importante ($T=200N$).

Remarque: la relation traduisant l'immobilité de G permettrait de déterminer la réaction \vec{R}_0