ثانوية ابن الرومي التأهيلية
نيابة سيدي البرنوصي

MATH-HOR

الموسم الدراسي : 2012-2013

تصحيح الفرض الأول

أولمبياد الرياضيات

المستوى : الجذع المشترك العلمي

أولمبياد الرياضيات 2013 OLYMPIADE MATHEMATIQUE

التمرين الأول

لدينا x عدد حقيقي :

1- لدينا : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+2.x.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=x^2+x+1$

إذن : لكل $x\in IR$ $\boxed{x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

2- لدينا :

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}-1=\frac{x^2+x-1-x^2-x-1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}-1-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{-2}{x^2+x+1}<0$$

ومنه: $(1):\boxed{\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}<1}$

لدينا :

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{5}{3}=\frac{3\left(x^2+x-1\right)+5\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{8x^2+8x+2}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{2\left(2x+1\right)^2}{x^2+x+1}\geq 0$$

ومنه: $(2):\boxed{-\frac{5}{3}\leq\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}}$

من (1) و (2) نستنتج أن لكل $x\in IR$: $\boxed{-\frac{5}{3}\leq\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}<1}$

التمرين الثاني

لدينا : $b^4+a^2c^2=c^4+a^2b^2$ يكافئ $b^4+a^2c^2-c^4-a^2b^2=0$

يكافئ $b^4-c^4+a^2c^2-a^2b^2=0$

يكافئ $\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2\right)-a^2\left(b^2-c^2\right)=0$

يكافئ $\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)=0$

يكافئ $b^2+c^2-a^2=0$ أو $b^2-c^2=0$

يكافئ $a^2=b^2+c^2$ أو $b=c$ لأن: $b>0$ و $c>0$

وبما أن : $b\neq c$ فإن : $b^4+a^2c^2=c^4+a^2b^2$ يكافئ $a^2=b^2+c^2$

أي أن : $BC^2=AC^2+AB^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

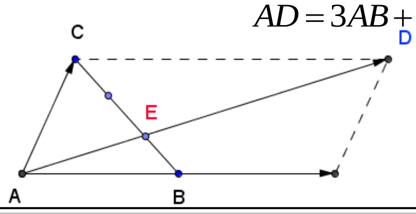
التمرين الثالث

لدينا : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

وحيث أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ أي: $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$ فإن: $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}$

إذن : $\overrightarrow{AD}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)=3\overrightarrow{AE}$

إذن : $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$ وبالتالي: النقط D و E و A مستقيمية.



التمرين الرابع

1- لدينا لكل $n\in IN^*$: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$ إذن: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

2- لدينا لكل $n\in IN^*$:

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2.\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$=1+2.\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2-2.\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1+2.\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-2.\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-2.\underbrace{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\right)}_{=0}=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

وبالتالي : $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

3- لدينا : $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$ إذن : $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}$

إذن : $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\left|1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ لأن : $1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n(n+1)}>0$

ومنه : $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\dots+\sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}$

إذن : $=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)$

يعني : $=\left(1+\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(1+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(1+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\dots+\left(1+\cancel{\frac{1}{2012}}-\frac{1}{2013}\right)$

إذن : $=\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{2013\text{ حد}}-\frac{1}{2013}=2013-\frac{1}{2013}$

وبالتالي : $\boxed{S=2013-\frac{1}{2013}}$