

<p>نيابة تاوريرت ثانوية الفتح التأهيلية</p>	<p>فرض الأولمبياد في الرياضيات للجذع المشترك العلمي - الفرض الأول -</p>	<p>الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي</p>
---	---	--

حلول مقترحة

تمرين 1 :

نضع: $A = 7^{87}$ ، $B = 5^{145}$ ، $C = 3^{203}$ بملاحظة أن: $87 = 29 \times 3$ و $145 = 29 \times 5$ و $203 = 29 \times 7$

فإن: $A = (7^3)^{29}$ ، $B = (5^5)^{29}$ ، $C = (3^7)^{29}$

إذن يكفي ترتيب $7^3 = 343$ و $5^5 = 3125$ و $3^7 = 2187$ (يمكن استعمال آلة حاسبة والتي لن تكون مفيدة بداية)

بما أن: $7^3 < 3^7 < 5^5$ فإن: $A < C < B$

تمرين 2 :

نعلم أن: $(a-b)^2 \geq 0$ منه: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ منه: $a^2 + b^2 + 2ab \geq 2ab + 2ab$ أي: $(a+b)^2 \geq 4ab$

منه: $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$ أو أيضا: $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ و بنفس الطريقة نبين أن: $\frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2}$ و $\frac{2ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{2}$

وبجمع المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq \frac{2(a+b+c)}{2} = a+b+c$

يفترض معرفة بعض المتفاوتات الهامة من بينها: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ و $(a+b)^2 \geq 4ab$

تمرين 3 : $a+b+c=0$

لدينا: $a+b+c=0$ منه: $a+b=-c$ و $a+b=-c$ منه: $(a+b)^3 = (-c)^3 = -c^3$

منه: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$ منه: $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 + c^3 = 0$

منه: $a^3 + 3ab(-c) + b^3 + c^3 = 0$ منه: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

نضع: $S = (a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$

لدينا: $a+b+c=0$ منه: $(a+b+c)^2 = 0$ منه: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$

$$S = a^5 + a^2b^3 + a^2c^3 + b^2a^3 + b^5 + b^2c^3 + c^2a^3 + c^2b^3 + c^5$$

$$S = a^5 + b^5 + c^5 + a^3(b^2 + c^2) + b^3(a^2 + c^2) + c^3(a^2 + b^2)$$

$$S = a^5 + b^5 + c^5 + a^3((b+c)^2 - 2bc) + b^3((a+c)^2 - 2ac) + c^3((a+b)^2 - 2ab)$$

$$S = a^5 + b^5 + c^5 + a^3(a^2 - 2bc) + b^3(b^2 - 2ac) + c^3(c^2 - 2ab)$$

$$S = a^5 + b^5 + c^5 + a^5 - 2a^3bc + b^5 - 2b^3ac + c^5 - 2c^3ab$$

منه:

$$S = 2(a^5 + b^5 + c^5) - 2abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$S = 2(a^5 + b^5 + c^5) - 2 \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$S = 2(a^5 + b^5 + c^5) - \frac{2}{3} S$$

$$S + \frac{2}{3} S = 2(a^5 + b^5 + c^5)$$

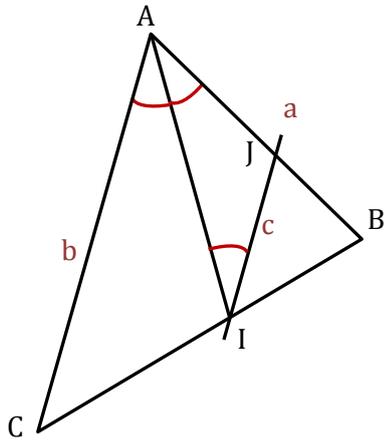
$$\frac{5}{3} S = 2(a^5 + b^5 + c^5) \quad \text{منه:}$$

$$\frac{S}{6} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{3}$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right) \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \right) = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \quad \text{أي:}$$

2

تمرين 4 :



لدينا $(IJ) \parallel (AC)$ و (AI) قاطع لهما إذن الزاويتان المتبادلتان داخليا $\hat{I}AC$

و $A\hat{I}J = I\hat{A}J$ فإن $I\hat{A}C = I\hat{A}J$ وبما أن: $A\hat{I}J = I\hat{A}J$ متقايستان، وبما أن:

إذن مثلث AIJ مثلث متساوي الساقين في J منه: $AJ = IJ = c$

الآن و باستعمل مبرهنة طاليس المباشرة في المثلث ABC نستنتج أن:

$$\frac{a-c}{a} = \frac{c}{b} \text{ أي: } \frac{AB - AJ}{AB} = \frac{JI}{AC} \text{ أي: } \frac{BJ}{BA} = \frac{JI}{AC} \text{ منه: } \frac{BJ}{BA} = \frac{BI}{BC} = \frac{JI}{AC}$$

أي: $b(a-c) = ac$ أي: $ab - bc = ac$ منه: $ab = ac + bc$

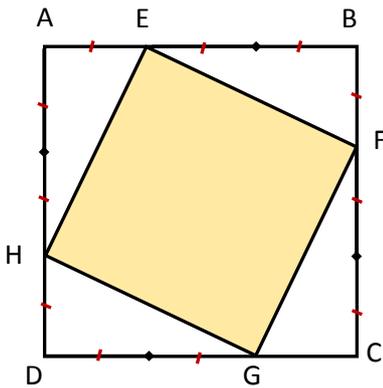
بالتالي: $c(a+b) = ab$

هناك خاصية مرتبطة بموقع المنصف الداخلي لزاوية يفترض معرفتها قد تكون مفيدة في تمرين مشابه والتي تقول:

« في مثلث ABC إذا كانت E هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي للزاوية $B\hat{A}C$ مع $[BC]$ فإن: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$ »

في حالتنا هذه سيكون لدينا: $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ لكن لن تفيدنا في البرهان على النتيجة.

تمرين 5 :



$$S_{AEH} = S_{EBF} = S_{CGF} = S_{HDG} = \frac{AE \times AH}{2} = \frac{\frac{a}{3} \times \frac{2a}{3}}{2} = \frac{a^2}{9} \text{ لدينا:}$$

$$S_{EHGF} = S_{ABCD} - 4S_{AEH} = a^2 - \frac{4a^2}{9} = \frac{5}{9}a^2 \text{ منه:}$$

تمرين جد سهل