الجذع المشترك العلمي و التكنلوجي	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	سلسلة 1

الحلول من اقتراح أذ سمير لخريسي

تمرين 1 :

لدينا : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} = 14+2 = 16$ و بما أن $x>0$ فإن : $x+\frac{1}{x}>0$ منه : $x+\frac{1}{x} = \sqrt{16} = 4$

من جديد لدينا : $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x+2+\frac{1}{x} = 4+2 = 6$ ، بالتالي : $\boxed{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{6}}$

تمرين 2 : تذكير بالمتفاوتات الهامة :

- لكل x و y من IR : $\boxed{x^2+y^2 \geq 2xy}$ (لأن $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0$)
- لكل x و y من IR^+ : $\boxed{x+y \geq 2\sqrt{xy}}$ (لأن $x+y-2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$)
- لكل x من IR^+ : $\boxed{x+\frac{1}{x} \geq 2}$ (لأن $x+\frac{1}{x}-2 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$)

باستعمال المتفاوتة الثانية نجد: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$ و أيضا $\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$

منه : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}} = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$

نطبق للمرة الثالثة المتفاوتة الهامة فنجد: $\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{c}}\times\sqrt{\frac{c}{a}}} = 2$

بالتالي : $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4}$

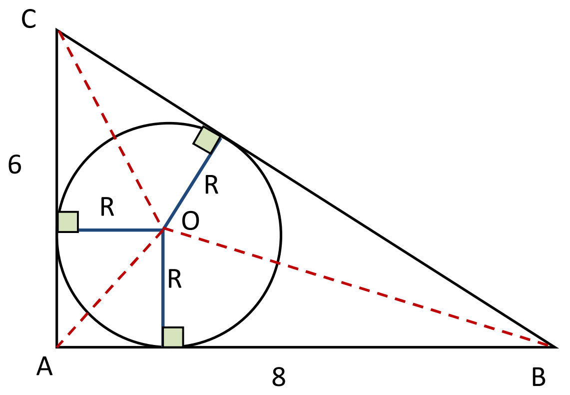
تمرين 3 :

لدينا :

$$\begin{aligned} B-A &= 2015(1+2+..+2014)-2014(1+2+...+2015) \\ &= 2015(1+2+..+2014)-2014(1+2+..+2014+2015) \\ &= 2015(1+2+..+2014)-2014(1+2+..+2014)-2014\times2015 \\ &= (1+2+..+2014)(2015-2014)-2014\times2015 \\ &= (1+2+..+2014) \qquad -(2015+2015+2015+...+2015)\ \langle 2014\ \ fois\rangle \\ &= (1-2015)+(2-2015)+(3-2015)+...+(2014-2015)<0 \end{aligned}$$

بالتالي : $\boxed{B<A}$

تمرين 4 :



لدينا : $S_{ABC} = S_{OBC}+S_{OAB}+S_{OAC}$

منه : $\frac{AB\times AC}{2} = \frac{R\times BC}{2}+\frac{R\times AB}{2}+\frac{R\times AC}{2}$

منه

$$AB\times AC = R\times BC+R\times AB+R\times AC$$
$$AB\times AC = R(BC+AB+AC)$$

منه : $R = \frac{AB\times AC}{BC+AB+AC}$

و باستعمال مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث ABC القائم الزاوية نجد أن : $BC=10$ ، بالتالي: $\boxed{R = \frac{8\times6}{8+6+10} = \frac{48}{24} = 2}$

تمرين 5 :

لتكن : J منتصف $[AB]$ ، إذن JMB مثلث قائم الزاوية في J ، إذن باستعمال مبرهنة فيتاغورس المباشرة نجد :

$$MB^2 = BJ^2 + MJ^2$$

للتبسيط نضع : $x = AM = BM = IM$

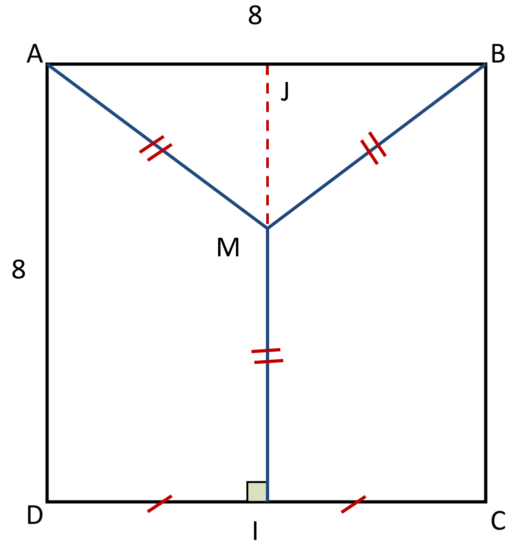
منه : $BJ = \frac{AB}{2} = 4$ و $MJ = IJ - IM = 8 - x$

منه : $x^2 = 4^2 + (8-x)^2$

$$x^2 = 16 + 64 - 16x + x^2$$

منه : $16x = 80$ ، بالتالي : $\boxed{AM = 5}$

$$x = \frac{80}{16} = 5$$



إدراج رموز نقط للشكل قصد استعمالها يكون ضروريا في كثير من تمارين أولمبياد الرياضيات الهندسية.