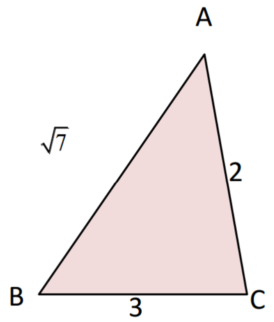
التمرين الأول: (5.5 نقط)

نعتبر المثلث ABC (انظر الشكل جانبه) ABC



1) احسب $\cos B\hat{A}C$ ثم $\sin B\hat{A}C$ — 1.5 ن

2) بين أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$ — 0.5 ن

3) D نقطة من المستوى بحيث: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

أ) احسب: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ — 1 ن

ب) بين أن: $(AC)\perp(DB)$ — 1.5 ن

4) لتكن I منتصف القطعة $[BC]$. احسب المسافة: AI — 1ن

حلول:

1) حساب $\cos B\hat{A}C$ ثم $\sin B\hat{A}C$:

لدينا حسب مبرهنة الكاشي في المثلث ABC:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\times\cos B\hat{A}C$$

إذن

$$\cos B\hat{A}C=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$$
$$=\frac{\sqrt{7}^2+2^2-3^2}{2\times\sqrt{7}\times 2}$$
$$=\frac{7+4-9}{4\sqrt{7}}$$
$$=\frac{2}{4\sqrt{7}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

استنتاج: $\sin B\hat{A}C$

نعلم أن: $\sin^2 B\hat{A}C+\cos^2 B\hat{A}C=1$

إذن: $\sin^2 B\hat{A}C=1-\cos^2 B\hat{A}C$

وبالتالي:

$$\sin B\hat{A}C=\sqrt{1-\cos^2 B\hat{A}C}\ ou\ -\sqrt{1-\cos^2 B\hat{A}C}$$

وحيث أن قياسات زوايا مثلث لا تتعدى 180 درجة فإن :

$$\sin B\hat{A}C\geq 0$$

وأخيرا:

$$\sin B\hat{A}C=\sqrt{1-\cos^2 B\hat{A}C}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{28}}$$
$$=\sqrt{\frac{27}{28}}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$
$$=\frac{3\sqrt{21}}{14}$$

2) لنبين أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

نعلم أن:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$$
$$=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}$$
$$=\frac{14}{14}=1$$

3)

أ -

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}4$$
$$=1$$

ب -

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=-1+1$$
$$=0$$

وبالتالي: $(AC)\perp(DB)$

4) حساب AI

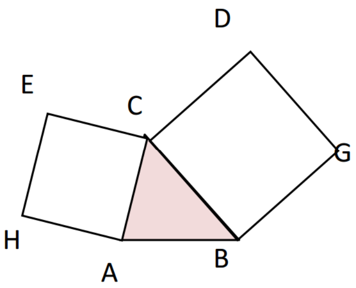
حسب مبرهنة المتوسط فإن:
$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$$

ومنه :
$$AI^2=\frac{AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$AI=\sqrt{\frac{AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{7}^2+2^2-\frac{9}{2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{13}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

التمرين الثاني: (4 نقط)

ABC مثلث . ننشئ خارجه مربعين (انظر الشكل)



1) بين أن: $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$ ‏ 1.5 ن

2) بين أن: $(EB)\perp(AD)$ ‏ 1 ن

3) بين أن : $AD=EB$ ‏ 1.5 ن

حلول:

1) لدينا:
$$A\hat{C}B+B\hat{C}D+D\hat{C}E+E\hat{C}A=360°$$
$$180°+A\hat{C}B+D\hat{C}E=360°$$
$$A\hat{C}B+D\hat{C}E=180°$$
$$A\hat{C}B=180°-D\hat{C}E$$

ومنه:
$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos B\hat{C}A$$
$$=CD\times CE\times\cos(180°-D\hat{C}E)$$
$$=-CD\times CE\times\cos(D\hat{C}E)$$
$$=-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$$

(2
$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}).(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$$
$$=0-\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}+0$$
$$=0$$

3) حسب مبرهنة الكاشي في المثلثين: ADC و EBC لدينا:
$$AD^2=CA^2+CD^2-2CA\times CD\cos A\hat{C}D$$
$$=CE^2+CB^2-2CE\times CB\cos(90°+A\hat{C}B)$$
$$=CE^2+CB^2-2CE\times CB\cos(E\hat{C}B)$$
$$=EB^2$$

$$AD^2=EB^2$$
$$AD=EB$$

التمرين الثالث: (7 نقط)

نعتبر الدالتين: $f(x)=x^2-2x-3$ و $g(x)=\frac{-x-7}{x+1}$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^3-x^2-4x+4=0$ (لاحظ أن 1 حل خاص للمعادلة) ‏ 1.5ن

2) بين أنه لكل $x\neq-1$ لدينا: $f(x)=g(x)$ تكافئ: $x^3-x^2-4x+4=0$ ‏ 1 ن

3) أنشئ منحنى كل من f و g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ‏ 3 ن

4) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x)\leq g(x)$ ‏ 1.5 ن

حلول:

1) بما أن 1 حل خاص للمعادلة فإن الحدودية تقبل القسمة على $x-1$ فإن:

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4x+4 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2-4 \\ -4x+4 & \\ \underline{-4x+4} & \\ 0+0 & \end{array}$$

تعني:

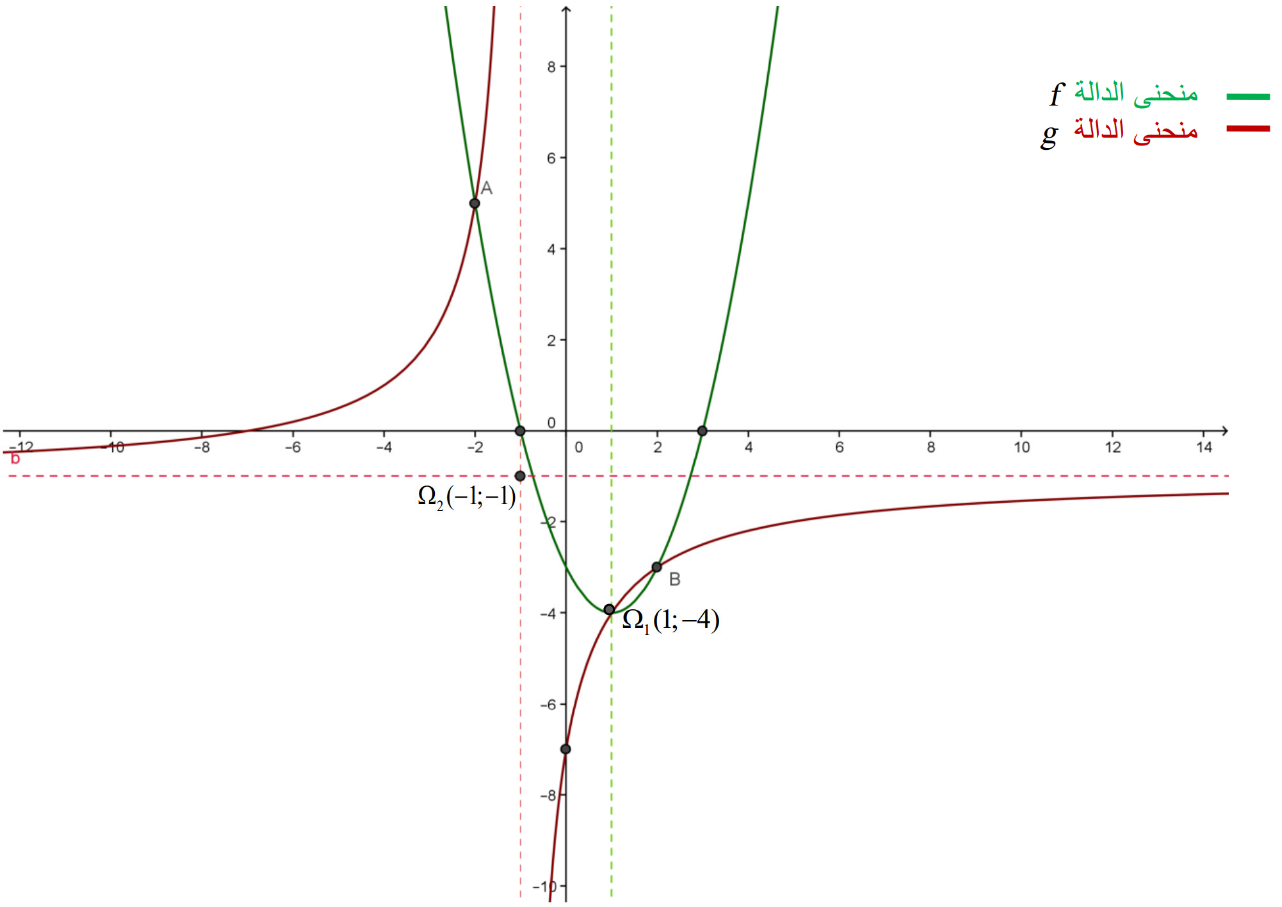
$$x^3-x^2-4x+4=0$$
$$(x-1)(x^2-4)=0$$
$$x-1=0;ou;x^2-4=0$$
$$x=1;ou;x=2;ou;x=-2$$

2) لكل $x\neq -1$

$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{-x-7}{x+1}=x^2-2x-3$$
$$(x+1)(x^2-2x-3)=-x-7$$
$$x^3-2x^2-3x+x^2-2x-3=-x-7$$
$$x^3-x^2-4x+4=0$$

3) منحنى الدالة f شلجم رأسه $\Omega_1(1;-4)$ ومحور تماثله المستقيم ذو المعادلة: $x=1$

ومنحنى الدالة g هذلول مركزه $\Omega_2(-1;-1)$ ومعادلتا مقاربيه هما: $x=-1$ و $y=-1$



4) حلول المتراجحة: $f(x)\leq g(x)$ مبيانيا هي أفاصيل النقط التي يكون فيها منحنى f أسفل منحنى g

$$s=[-2;-1[\cup[1;2]$$

التمرين الرابع: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة المعرفة بمايلي: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1) تحقق من أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ — 0.5 ن

2) أ- بين أن الدالة f تزايدية على المجال $]-\infty;0]$ — 0.75 ن

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $[0;+\infty[$ — 0.75 ن

3) ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ — 0.5 ن

4) بين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى على $\mathbb{R}$ حددها. — 1 ن

حلول:

1) بما أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2+1\geq 1>0$ فإن f معرفة على $\mathbb{R}$

2) ليكن x_1 و x_2 عنصرين ***مختلفين*** من $\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

أ - لنبين أن $f(x_1)<f(x_2)$ على $]-\infty;0]$

$$x_1<x_2<0$$
$$x_1^2>x_2^2$$
$$x_1^2+1>x_2^2+1$$
$$\frac{1}{x_1^2+1}<\frac{1}{x_2^2+1}$$
$$f(x_1)<f(x_2)$$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $]-\infty;0]$

ب- لنبين أن $f(x_1)>f(x_2)$ على $[0;+\infty[$

$$x_1>x_2>0$$
$$x_1^2>x_2^2$$
$$x_1^2+1<x_2^2+1$$
$$\frac{1}{x_1^2+1}>\frac{1}{x_2^2+1}$$
$$f(x_1)>f(x_2)$$

إذن f تناقصية قطعا على المجال $[0;+\infty[$

3) جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	

4) بما أن f تزايدية على المجال $]-\infty;0]$ و تناقصية على المجال $[0;+\infty[$ فإنها تقبل قيمة قصوى عند 0 وهي $f(0)=1$