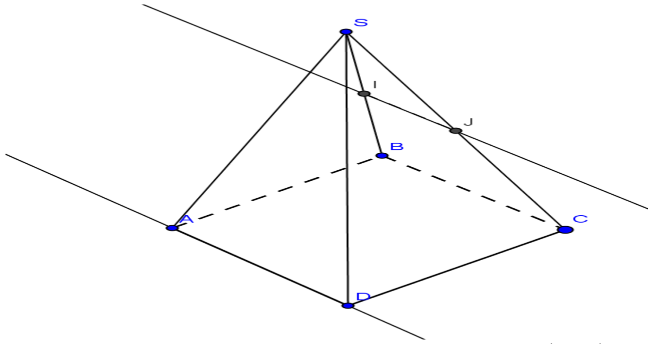
تمارين محلولة:الهندسة الفضائية

المستوى : الجذع مشترك علمي
و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1:
ليكن $SABCD$ هرما قاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$
و لتكن I و J منتصفي القطعتين $[SB]$ و $[SC]$ على التوالي.
1) بين أن $(AD)\parallel(IJ)$

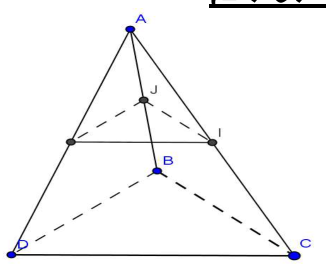


2) أثبت أن $(IJ)\parallel(ADS)$

الجواب1)
في المثلث SBC لدينا: I منتصف $[SB]$ و J منتصف $[SC]$
إذن, $(IJ)\parallel(BC)$.
و لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع اذن $(BC)\parallel(AD)$ و منه ان $(AD)\parallel(IJ)$ (1)
لدينا $A\in(ADS)$ و $D\in(ADS)$ إذن $(AD)\subset(ADS)$ (2)
من(1) و(2) نستنتج أن: $(IJ)\parallel(ADS)$

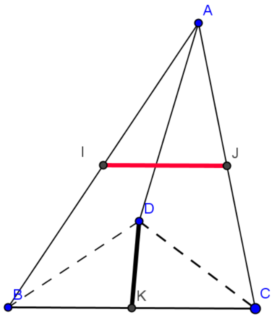
تمرين2: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[AC]$
و J منتصف القطعة $[AB]$ و K منتصف القطعة $[AD]$
1) أنشئ شكلا مناسبا.
2)بين أن $(BCD)\parallel(IJK)$

الجواب1)



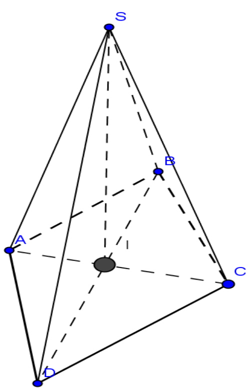
2)في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$ اذن
$(IJ)\parallel(BC)$
و لدينا في المثلث ABD : K منتصف $[AD]$ و J منتصف $[AB]$ اذن
$(JK)\parallel(BD)$
و لدينا : $(IJ)\parallel(BC)$ و $(BC)\subset(BCD)$ إذن $(IJ)\parallel(BCD)$ (1)
و لدينا : $(JK)\parallel(BD)$ و $(BD)\subset(BCD)$ اذن $(JK)\parallel(BCD)$ (2)
و لدينا : $(IJ)\cap(JK)=\{J\}$ (3)
و لدينا : $(IJ)\subset(IJK)$ و $(JK)\subset(IJK)$ (4)
إذن(1) و(2) و(3) و(4) نستنتج أن: $(BCD)\parallel(IJK)$

تمرين3: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه حيث : $BD=DC$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف القطعة $[BC]$
1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن $(DK)\perp(IJ)$



الجواب1)
في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$ اذن
$(IJ)\parallel(BC)$ (1)
و في المثلث BCD
لدينا $BD=DC$ و K منتصف القطعة $[BC]$ اذن : $(DK)\perp(BC)$ (2)
من(1) و(2) نستنتج أن: $(DK)\perp(IJ)$

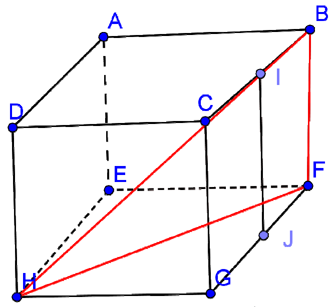
تمرين4: ليكن $ABCD$ شبه منحرف قطراه $[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في I . لتكن S نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث يكون $(SI)\perp(ABC)$
1) حدد تقاطع المستويين (SAC) و (SBD) وحدد تقاطع المستويين (SAB) و (SDC) .
2) تحقق أن $(SI)\perp(AB)$ وبين أن المستويين (SAC) و (ABC) متعامدان.
3) نفترض أن المثلث ABC قائم الزاوية في B و أن $SI=3$
$BC=\frac{1}{4}$, $AB=2$, $CD=3$.
أحسب حجم الهرم $SABCD$



الجواب1) أ)لدينا
$(SAC)\neq(SBD)$ لأن النقط S ,
A , B , C و D غير مستوائية.
لدينا: $S\in(SAC)$
و $S\in(SBD)$
و لدينا $I\in(AC)$ و
$(AC)\subset(SAC)$ إذن $I\in(SAC)$
و لدينا $I\in(BD)$ و $(BD)\subset(SBD)$ إذن $I\in(SBD)$
إذن المستويان (SAC) و (SBD) يشتركان في النقطتين S و I .
إذن $(SAC)\cap(SBD)=(IS)$
ب)لدينا $S\in(SAB)$ و $S\in(SDC)$

و لدينا $(AB)\subset(SAB)$ و $(DC)\subset(SDC)$ و $(DC)\parallel(AB)$.
إذن (SAB) و (SDC) يتقاطعان في مستقيم يمر من S و يوازي المستقيمين (AB) و (DC) .حسب مبرهنة السقف.
2)أ)لدينا $(SI)\perp(ABC)$ و $(AB)\subset(ABC)$.
إذن $(SI)\perp(AB)$
ب)لدينا $(SI)\subset(SAC)$ و $(SI)\perp(AC)$
إذن $(SI)\perp(ABC)$ و منه فان $(ABC)\perp(SAC)$
3) $((AB)\perp(BC))$ و منه مساحة شبه المنحرف $ABCD$
هي: $S=\frac{(DC+AB)\times BC}{2}=\frac{(3+2)\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$
(لأن ارتفاعه هو BC)ومنه حجم الهرم $SABCD$ هو: $V=\frac{1}{3}\cdot S\times(SI)$
أي: $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot 3=\frac{5}{8}$

تمرين5: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء.
لتكن I و J منتصفي القطعتين $[BC]$ و $[FG]$ على التوالي.

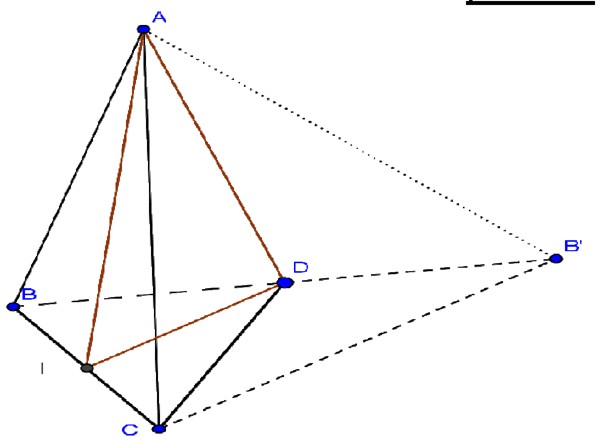


1) بين أن $(IJ)\parallel(HFB)$
2) بين أن $(HFB)\cap(EJ)=(PQ)$
حيث $(HF)\cap(EJ)=\{P\}$
و $(AI)\cap(BD)=\{Q\}$
3) بين أن $(PQ)\parallel(FB)$

الجواب1) لدينا I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[FG]$ و
لدينا $(IJ)\parallel(BF)$ و بما أن $(BF)\subset(HFB)$ فان $(IJ)\parallel(HFB)$ و
هذا هو المطلوب.
2)لدينا $(EJ)\subset(EIJ)$ و $(AI)\subset(EIJ)$ (لأن $(IJ)\parallel(AE)$ و منه النقط A , I , E و J نقط استوائية)
إذن $P\in(EIJ)$ و $Q\in(EIJ)$ ($Q\in(AI)$ و $P\in(EJ)$) و هذا يعني أن $(PQ)\subset(EIJ)$ (1) من جهة أخرى لدينا $(HF)\subset(HFB)$ و $(BD)\subset(HFD)$ (لأن $(BF)\parallel(DH)$ ومنه النقط D, H و F مستوائية).
إذن $P\in(HFD)$ و $Q\in(HFD)$ و هذا يعني أن $(PQ)\subset(HFD)$ (2) بما أن $(EIJ)\neq(HFD)$ فان (من (1) و (2))
$(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$
3)لدينا $(BF)\parallel(IJ)$ و $(IJ)\subset(EIJ)$ و $(BF)\subset(HFD)$
و $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$ إذن $(PQ)\parallel(FB)$.

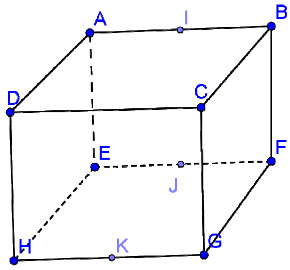
تمرين6: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[BC]$
و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D .
1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن $(CB')\parallel(AID)$
3) حدد تقاطع المستويين (AID) و $(AB'C)$.

الجواب1:



2)لدينا I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D .
إذن D منتصف $[BB']$
و منه $(ID)\parallel(B'C)$ و لدينا $(ID)\subset(AID)$
إذن $(CB')\parallel(AID)$
3)لدينا $A\in(AID)$ و $A\in(AB'C)$ و $(AID)\neq(AB'C)$
إذن المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A .
و بما أن $(ID)\subset(AID)$ و $(B'C)\subset(AB'C)$.
و أن $(B'C)\parallel(ID)$
فان المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A و يوازي $(B'C)$ و (ID).

تمرين7: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا .
لتكن I, J و K منتصفات القطع $[AB]$, $[EF]$ و $[GH]$ على التوالي.
1) بين أن النقط B , C , J و K مستوائية.
2) بين أن I , B , H و K مستوائية.
3) بين أن $(IH)\parallel(KB)$.
4) استنتج أن $(IH)\parallel(JKC)$.



الجواب1) في المربع $EFGH$ لدينا I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $(EH)\parallel(JK)\parallel(FG)$
و نعلم أن $(FG)\parallel(BC)$ إذن $(JK)\parallel(BC)$
و منه فان النقط B , C , J و K مستوائية.
2)لدينا $(EF)\parallel(AB)$ و $(HG)\parallel(EF)$ إذن $(HG)\parallel(AB)$ و منه فان النقط A , B , G و H مستوائية.
و لدينا $I\in[AB]$ و $K\in[HG]$.
إذن النقط I , B , H و K مستوائية.
3) $AB=HG$ و I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $IB=HK$.
و نعلم أن $(IB)\parallel(HK)$
إذن الرباعي $IBKH$ متوازي أضلاع و منه فان $(IH)\parallel(KB)$

4)لدينا النقط B , C و I مستوائية.

و لدينا $(BK)\subset(JCK)$ و$(IH)\parallel(BK)$

إذن $(IH)\parallel(JKC)$.

تمرين8: ليكن $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات.

و لتكن O و O' مركزي المستطيلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$ على التوالي.

1) أنشئ شكلا مناسبا.

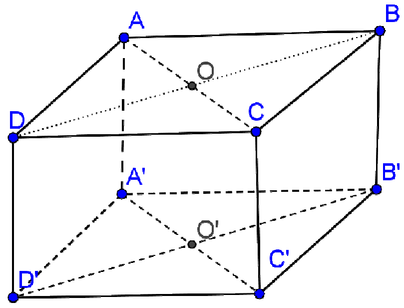
2) بين أن النقط A , A' , C و C' مستوائية.

بين أن B , B' , D و D' مستوائية.

3) بين أن $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$

4) بين أن $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$ و$(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$.

الجواب1)



2)في المستطيل $AA'B'B$ لدينا $(AA')\parallel(BB')$ (1)

في المستطيل $BB'CC'$ لدينا $(BB')\parallel(CC')$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(AA')\parallel(CC')$

و منه فان النقط A , A' , C و C' مستوائية.

و بنفس الطريقة نبين أن: $(BB')\parallel(DD')$ و منه فان النقط B , B' , D و D' مستوائية.

3)لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ إذن $O\in(BD)$ و

منه $O\in(BB'D)$ و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(B'D')$ و

منه $O'\in(BB'D)$

ادن $(OO')\subset(BB'D)$ (α)

لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ اذن $O\in(AC)$ و منه $O\in(AA'C)$

و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(A'C')$ و

منه $O'\in(AA'C')$

إذن $(OO')\subset(AA'C)$ (β)

و لدينا $(AA'C)\neq(BB'D)$ (A , A' , B , B' , C وD نقط غير مستوائية).

و منه (α) و(β) نستنتج أن: $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$ هذا هو المطلوب

4)لدينا $(BB')\parallel(AA')$ و $(AA')\subset(AA'C)$ و$(BB')\subset(BB'D)$

و $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$

إذن $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$

و بنفس الطريقة:

$(DD')\parallel(CC'')$ و $(DD')\subset(BB'D)$ و$(CC')\subset(ACC')$

و $(ACC')\cap(BB'D)=(OO')$

إذن $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$.

تمرين9: ليكن $ABCD$ مربعا و E نقطة من الفضاء حيث:

$(AE)\perp(ABC)$

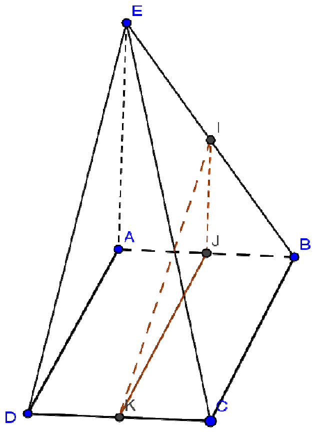
النقط I, J و K منتصفات القطع $[EB]$, $[AB]$ و $[DC]$

1) بين أن $(IJ)\parallel(ADE)$.

بين أن $(IJK)\parallel(ADE)$.

2) بين أن $(JK)\parallel(ABE)$.

3) حدد تقاطع المستويين (ABE) و(AIK).



الجواب1) لدينا في المثلث ABE

I منتصف $[EB]$ وJ

منتصف $[AB]$ اذن $(IJ)\parallel(AE)$

و لدينا $(AE)\subset(ADE)$

إذن $(IJ)\parallel(ADE)$ (1)

و منه المطلوب.

لدينا K منتصف $[DC]$

إذن $(JK)\parallel(AD)\parallel(BC)$

و $(AD)\subset(ADE)$ اذن $(JK)\parallel(ADE)$ (2)

إذن(1) و(2) نستنتج أن: $(JIK)\parallel(ADE)$

و منه المطلوب.

2)لدينا $(AE)\perp(ABC)$

و $(JK)\subset(ABC)$ إذن $(AE)\perp(JK)$

و لدينا $(JK)\parallel(AD)$ و$(AD)\perp(AB)$

إذن $(JK)\parallel(AB)$

و منه فان (JK) عمودي على مستقيمين متقاطعين هما (AB) و (AE)

ضمن المستوى (ABE)

إذن $(JK)\perp(ABE)$

3)لدينا $(AIK)\neq(ABE)$ $(E\notin(ABC))$

لدينا $A\in(ABE)$ و$A\in(AIK)$

و $(EB)\subset(ABE)$ إذن $I\in(ABE)$ (لأن $I\in(EB)$)

لدينا $I\in(AIK)$

و منه $(AIK)\cap(ABE)=(AI)$.