ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المعادلات و المتراجحات و النظمات

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين. كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير):

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل $ax+b\geq 0$ أو $ax+b\succ 0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b\prec 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	إشارة a	

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1) تعريف: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

2) خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية, و a غير منعدم.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

3) تعريف: لتكن ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

4) خاصية: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

✓ **إذا كان** $\Delta\prec 0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ **إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ **إذا كان** $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

5) مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ حلان x_1 و x_2

فإنهما يحققان المتساويتين $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$.

IV. تعميل و إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c

1) تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

إذا كان: $\Delta\succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

إذا كان: $\Delta\prec 0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

2) إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

الحالة1: إذا كان $\Delta\succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a	

الحالة2: إذا كان $\Delta=0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	اشارة a	

الحالة3: إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a فان.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	

V. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

مثال: حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة : $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{-2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

VI. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c و c'

1) طريقة التعويض: مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$ الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا :

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$ ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية : $-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

2) طريقة التأليفة الخطية مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$ الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2)

فنحصل على : $\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف

نجد: $-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

3) طريقة المحددة: تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}$

- إذا كان $\Delta=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.
- إذا كان $\Delta\neq 0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \quad \text{و} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.