تمارين وحلولها

تمرين 1 :

اتمم الجدول التالي :

الرديان	$\frac{\pi}{8}$				$\frac{\pi}{6}$
الدرجة		$15°$		$36°$	
الغراد			50		

الجواب :

* لدينا : $\frac{\pi}{8} = \frac{180}{8} = 22°,5$

$\frac{\pi}{8} = \frac{200}{8} = 25\ gr$

* لدينا : $\frac{x}{\pi} = \frac{15}{180}$

أي أن $x = \frac{15\pi}{180}$

$x = \frac{\pi}{12}$

* لدينا $\frac{\pi}{12} = \frac{200}{12} \simeq 16,66\ gr$

$50\ gr = \frac{200}{4}x = \frac{180°}{4} = 45°$

$50\ gr = \frac{\pi}{4}$

* لدينا

$\frac{x}{\pi} = \frac{36°}{180}$

$\frac{x}{\pi} = \frac{1}{5}$

$x = \frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5} = \frac{200}{12} = 40\ gr$

* لدينا : $\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

$\frac{\pi}{6} = \frac{200}{6} = 33,33\ gr$

إذن

الرديان	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$
الدرجة	$22,5°$	$15°$	$45°$	$36°$	$30°$
الغراد	25 gr	16,66gr	50	40°	33,33gr

تمرين 2 :

1 – احسب بالرديان قياسات زوايا مثلث متساوي الأضلاع.

2 – احسب بالراديان قياسات زوايا مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

الجواب :

1 – ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع.

نعلم أن $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

إذن : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$

2 – ليكن EFG مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية مثلا في E.

نعلم أن : $\hat{E} = 90°$

و $\hat{F} = \hat{G} = 45°$

إذن $\hat{E} = \frac{\pi}{2}$

و $\hat{F} = \hat{G} = \frac{\pi}{4}$

تمرين 3 :

1 – حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة في الحالات التالية :

أ – $M\left(-\frac{99\pi}{7}\right)$

ب – $M\left(\frac{504\pi}{7}\right)$

ج – $M\left(-\frac{277\pi}{4}\right)$

2 – هل العددان x و y هما أفصولان منحنيان لنفس النقطة على الدائرة المثلثية في الحالتين التاليتين :

أ – $x = \frac{45\pi}{4}$ و $x = -\frac{3\pi}{4}$

ب – $x = -\frac{123\pi}{5}$ و $x = \frac{337\pi}{5}$

الجواب :

1 – أ – لدينا $-\frac{99\pi}{7} = -\frac{98\pi + \pi}{7}$

$= -14\pi - \frac{\pi}{7}$

إذن : $-\frac{99\pi}{7} \equiv -\frac{\pi}{7} \; [2\pi]$

و $-\frac{\pi}{7} \in]-\pi,\pi]$

إذن الأفصول المنحنى الرئيسي لـ M هو $-\frac{\pi}{7}$

ب – لدينا $\frac{504\pi}{5} = \frac{500\pi + 4\pi}{5}$

$= 100\pi + \frac{4\pi}{5}$

إذن : $\frac{504\pi}{5} \equiv \frac{4\pi}{5} \; [2\pi]$

ومنه الأفصول المنحني الرئيسي لـ M هو $\frac{4\pi}{5}$

لأن $\frac{4\pi}{5} \in]-\pi,\pi]$

ج – لدينا : $-\frac{277\pi}{4} = \frac{-280\pi + 3\pi}{4}$

$= -70\pi + \frac{3\pi}{4}$

إذن $-\frac{277\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} \; [2\pi]$

إذن الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M هو $\frac{3\pi}{4}$

لأن $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi]$

2 – أ – لدينا : $x = \frac{45\pi}{4}$

$= \frac{48\pi - 3\pi}{4}$

$= 12\pi - \frac{3\pi}{4}$

إذن $x = 12\pi + y$

ومنه $x \equiv y \; [2\pi]$

إذن x و y أفصولان منحنيان لنفس النقطة

ب – نفترض أن : $x \equiv y \; [2\pi]$ أي أنه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث : $x = y + 2k\pi$

أي أن $-\frac{123\pi}{5} = \frac{337\pi}{5} + 2k\pi$

أي أن $-\frac{123\pi}{5} - \frac{337\pi}{5} = 2k\pi$

ومنه $2k\pi = -\frac{500\pi}{5}$

ومنه $2k\pi = -100\pi$

$2k\pi = -100$

$2k = -100$

ومنه $k = -50$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $x \equiv y\ [2\pi]$ إذن x و y أفصولان منحنيان لنفس النقطة.

تمرين 4 :

مثل على دائرة مثلثية النقط ذات الأفاصيل المنحنية التالية :

$\frac{169\pi}{4} ; -\frac{33\pi}{4} ; \frac{25\pi}{4} ; \frac{41\pi}{6} ; \frac{8\pi}{3} ; -\pi$

الجواب :

* نعتبر $A'(-\pi)$ إذن الأفصول المنحني الرئيسي لـ A' هو : π

* نعتبر $B\left(\frac{8\pi}{3}\right)$.

لدينا $\frac{8\pi}{3} \quad \frac{6\pi+2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

إذن $\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ B هو $\frac{2\pi}{3}$.

* نعتبر $C\left(\frac{41\pi}{6}\right)$.

لدينا $\frac{41\pi}{6} \quad \frac{36\pi+5\pi}{6}$

$= 6\pi \ ; \ \frac{5\pi}{6}$

إذن $\frac{41\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ C هو $\frac{5\pi}{6}$.

* نعتبر $D\left(\frac{25\pi}{4}\right)$.

لدينا $\frac{25\pi}{4} \quad \frac{24\pi+\pi}{4}$

$= 6\pi \ ; \ \frac{\pi}{4}$

إذن $\frac{25\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ D هو $\frac{\pi}{4}$.

* نعتبر $B\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

لدينا $\frac{33\pi}{4} \quad \frac{-32\pi-\pi}{4}$

$= -8\pi \quad \frac{\pi}{4}$

إذن $\frac{33\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ E هو $\frac{\pi}{4}$

نعتبر $F\left(\frac{169\pi}{3}\right)$

لدينا $\frac{169\pi}{8} \quad \frac{168\pi+\pi}{8}$

$= 21\pi \ ; \ \frac{\pi}{8}$

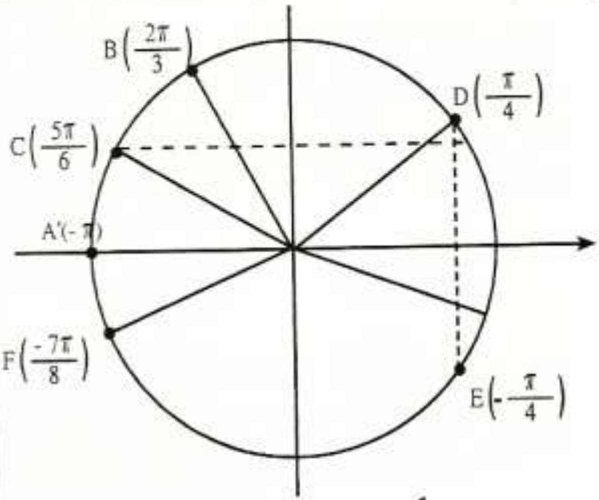
$= 21\pi + \pi + \frac{\pi}{8}$

إذن $\frac{169\pi}{8} \equiv \pi + \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

$\equiv -\pi + \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

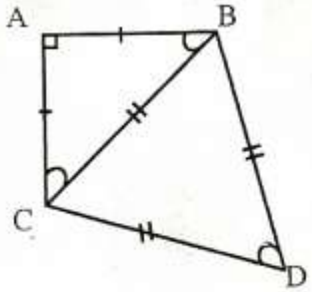
$\equiv -\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ E هو $-\frac{7\pi}{8}$.



تمرين 5 :

نعتبر الشكل التالي :



اعط القياس الرئيسي لكل من الزوايا التالية :

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$,

$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD})$, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})$

الجواب :

* لدينا $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

القياس الرئيسي الزاوية $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ هو $\frac{\pi}{4}$.

لدينا : $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن القياس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})$ هو : $-\frac{\pi}{3}$

* لدينا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

إذن القياس الرئيسي $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ هو : $-\frac{\pi}{2}$

لدينا $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD}) \equiv (-\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) [2\pi]$

$$\equiv \pi + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{6\pi - 2\pi}{3} [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD})$

هو : $-\frac{2\pi}{3}$

لدينا :

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{bC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})$

هو : $\frac{7\pi}{12}$

تمرين 6 :

ABC مثلث بين أن :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \pi [2\pi]$$

الجواب :

* لدينا $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (-\overrightarrow{AC},-\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) [2\pi]$$

$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})[2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\ [2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})\ [2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + 0\ [2\pi]$

إذن :

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv \pi[2\pi]$

تمرين 7 :

مثل على دائرة مثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية هي الأعداد :

$$k\in\mathbf{Z}\ ,\ \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$$

الجواب :

* لدينا $k\in\mathbf{Z}\ ,\ B\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)$

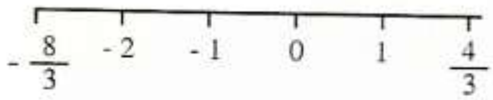
لنحدد قيم k التي من أجلها يكون $\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$ قياسا رئيسيا لـ M_k.

إذن $-\pi<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$

أي أن $-1<\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\leqslant 1$

إذن $-\frac{4}{3}<\frac{k}{2}\leqslant\frac{2}{3}$

أي أن $-\frac{8}{3}<k\leqslant\frac{4}{3}$



بما أن $k\in\mathbf{Z}$ فإن k تأخذ القيم 2- , 1- , 0 , 1.

$k=0$ إذن $M_0\left(\frac{\pi}{3}\right)$

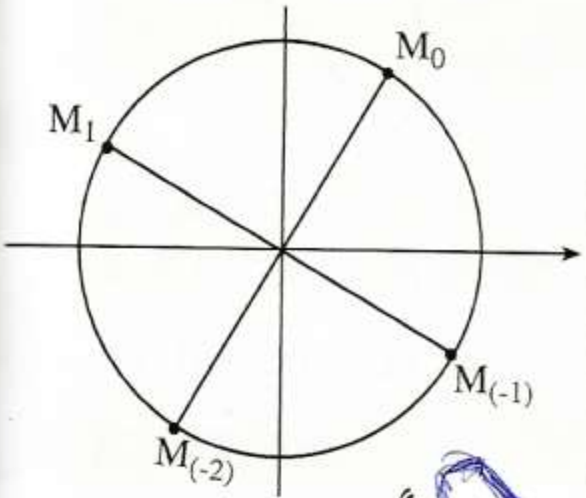
$k=1$ إذن $M_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$k=-1$ إذن $M_{-1}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$k=-2$ إذن $M_{-2}\left(-\frac{2\pi}{6}\right)$

لتمثيل النقط M_k يكفي أن تمثيل النقط .

M_0 , M_1 , M_{-1} و M_{-2}



تمرين 8 :

ليكن x من المجموعة $\mathbb{R}$ بسط مايلي :

$A(x)=2\sin^2(x)+3\cos^2(x)-1$

$B(x)=(\cos x+\sin x)^2-1$

$C(x)=\cos^2-\cos^2x\ .\ \sin^2x$

$D(x)=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$E(x)=\cos^5 x+\cos^3 x\ .\ \sin^2 x$

$F(x)=\cos^4 x-\cos^2x+\sin^2x-\sin^4x$

$G(x)=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2x\ .\ \cos^2x$

الجواب :

* لدينا $A(x) = 2\sin^2(x) + 3\cos^2(x) - 1$

$= 2\sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) - 1$

$= 2\sin^2 x + 3 - 3\sin^2 x - 1$

$= 2 - \sin^2 x$

إذن : $\boxed{A(x) = 2 - \sin^2 x}$

* لدينا $B(x) = (\cos x + \sin x)^2 - 1$

$= \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin s \cos x - 1$

$= 1 + 2 \sin x . \cos x - 1$

$= 2 \sin x \cos x$

إذن : $\boxed{B(x) = 2\sin x . \cos x}$

* لدينا $C(x) = \cos^2 - \cos^2 x . \sin^2 x$

$= \cos^2 x (1 - \sin^2 x)$

$= \cos^2 x . \cos^2 x$

إذن : $\boxed{C(x) = \cos^4 x}$

* لدينا

$D(x) = (2\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - 2\sin x)^2$

$= 4\cos^2 x + \sin^2 x + 4\cos x . \sin x + \cos^2 x$

$+ 4\sin^2 x - 4\sin x \cos x$

$= 5\cos^2 x + 5 \sin^2 x$

$= 5(\cos^2 x + \sin^2 x)$

$= 5 \times 1$

إذن : $\boxed{D(x) = 5}$

* لدينا $E(x) = \cos^5 x + \cos^3 x . \sin^2 x$

$= \cos^3 (\cos^2 x + \sin^2 x)$

$= \cos^3 x . 1$

إذن : $\boxed{C(x) = \cos^3 x}$

* لدينا

$F(x) = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^4 x$

$= \cos^2 x (\cos^2 x - 1) + \sin^2 x (1 - \sin^2 x)$

$= \cos^2 x .(- \sin^2 x) + \sin^2 x . \cos^2 x$

$= - \cos^2 x . \sin^2 x + \sin^2 x . \cos^2 x$

$= 0$

إذن : $\boxed{F(x) = 0}$

* لدينا

$G(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x . \cos^2 x$

$= (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 + 3\sin^2 x . \cos^2 x$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x) (\cos^4 x - \cos^2 x . \sin^2 x + \sin^4 x) + 3\sin^2 x . \cos^2 x$

$= \cos^4 x - \cos^2 x . \sin^2 x + \sin^4 x + 3 \sin^2 x . \cos^2 x$

$= \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x . \cos^2 x$

$= (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x . \cos^2 x$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$

$= 1^2$

$= 1$

إذن : $\boxed{F(x) = 1}$

تمرين 9 :

1 – ليكن x من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ احسب $\cos x$ و $\tan x$.

2 – إذا علمت أن : $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

و $\cos x = -\frac{2}{3}$ فاحسب : $\sin x$ و $\tan x$.

3 – إذا علمت أن $\alpha \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

و $\tan\alpha = \sqrt{7}$

فاحسب : $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

4 – إذا علمت أن : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

فاحسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ ثم $\tan\frac{5\pi}{12}$.

الجواب :

1 – لدينا : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{4}$

نعلم أن $\cos^2x + \sin^2x = 1$

أي أن $\cos^2x + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$

إذن $\cos^2x = 1 - \frac{5}{16}$

أي أن $\cos^2x = \frac{11}{16}$

ومنه $\cos x = -\frac{\sqrt{11}}{4}$ أو $\cos x = \frac{\sqrt{11}}{4}$

وبما أن $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x \geqslant 0$.

ومنه $\cos x = \frac{\sqrt{11}}{4}$

نعلم أن لكل x من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{55}}{11}$$

2 – لدينا $\cos x = -\frac{2}{3}$.

نعلم أن $\cos^2x + \sin^2x = 1$

أي أن $\sin^2x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$$\sin^2x = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\sin^2x = \frac{5}{9}$$

ومنه $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ أو $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

وبما أن $\sin x \geqslant 0$ فإن $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

نعلم أن لكل x من $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

إذن : $\tan x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

3 – لدينا : $\tan\alpha = \sqrt{7}$

نعلم أن $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

$$= \frac{1}{1+(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

إذن $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{8}}$ أو $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\cos\alpha = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ أو $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ أو $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

بما أن $\cos\alpha \leqslant 0$ فإن $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

نعلم أن $\tan \alpha = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

إذن $\sin \alpha = (\cos \alpha).(\tan \alpha)$

$$\sin\alpha = \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)\times \sqrt{7} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$$

4 – لدينا : $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

نعلم أن $\cos^2\dfrac{5\pi}{12} + \sin^2\dfrac{5\pi}{12} = 1$

إذن $\sin^2\dfrac{5\pi}{12} + \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1$

$$\sin^2\frac{5\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{8-2\sqrt{12}}{16}$$

$$= \frac{16-8+2\sqrt{12}}{16}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{12}}{16}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

إذن $\sin\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أو $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

وبما أن $0 < \dfrac{5\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$ فإن $\sin\dfrac{5\pi}{12} > 0$

ومنه $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

لدينا $\tan\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{12}}{4}$$

$$= \frac{8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{4(2+\sqrt{3})}{4}$$

إذن : $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$

تمرين 10 .

1 – احسب التعابير التالية :

$A = \sin^6x + \cos^6x - 2\sin^4x - \cos^4x + \sin^2x$

$B = 2(\cos^6x + \sin^6x) - 3(\cos^4x + \sin^4x)$

$C = \sin^8x + \cos^8x + 6\sin^4x \cdot \cos^4x + 4\sin^2x \cos^2x (\sin^4x + \cos^4x)$

$D = \sqrt{\sin^4x + 4\cos^2x} + \sqrt{\cos^4x + 4\sin^2x}$

$E = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cdot \cos x}$

الجواب :

1 – لدينا :

$$\begin{aligned} A &= \sin^6x + \cos^6x - 2\sin^4x - \cos^4x + \sin^2x \\ &= (\sin^2x)^3 + (\cos^2x)^3 - 2\sin^4x - \cos^4x + \sin^2x \\ &= (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x \cos^2x) - 2\sin^4x - \cos^4x + \sin^2x \\ &= \sin^4x + \cos^4x - \sin^2x \cos^2x - 2\sin^4x - \cos^4x + \sin^2x \\ &= - \sin^4x + \sin^2x - \sin^2x \cdot \cos^2x \\ &= \sin^2x (1 - \sin^2x) - \sin^2x \cdot \cos^2x \\ &= \sin^2x \cdot \cos^2x - \sin^2x \cdot \cos^2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 0}$$

$B = 2(\cos^6x + \sin^6x) - 3(\cos^4x + \sin^4x)$

$= 2(\cos^2x + \sin^2x)(\cos^4x + \sin^4x - \sin x^2 \cos^2x) - 3(\cos^4x + \sin^4x)$

$= 2\cos^4x + 2\sin^4x - 2\sin^2x \cdot \cos^2x - 3\cos^4x - 3\sin^4x$

$= - \cos^4x - \sin^4x - 2\sin^2x \cdot \cos^2x$

$= -(\cos^4x + \sin^4x + 2\sin^2x \cdot \cos^2x)$

$= -(\cos^2x + \sin^2x)^2 = -1$ $\boxed{B = -1}$

$C = \sin^8x + \cos^8x + 6\sin^4x \cdot \cos^4x + 4\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x)$

$= (\sin^4x + \cos^4x)^2 - 2\sin^4x\cos^4x + 6\sin^4x\cos^4x + 4\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x)$

$= (\sin^4x + \cos^4x)^2 + 4\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x) + 4\sin^4x \cdot \cos^4x$

$= (\sin^4x + \cos^4x)(\sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x \cdot \cos^2x) + 2\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x) + 4\sin^4x \cdot \cos^4x$

$= (\sin^4x + \cos^4x)(\sin^2x + \cos^2x)^2 + 2\sin^6x\cos^2x + 2\sin^2x \cdot \cos^6x + 4\sin^4x \cdot \cos^4x$

$= \sin^4x + \cos^4x + (2\sin^6x \cdot \cos^2x + 2\sin^4x\cos^4x) + (2\sin^2x\cos^6x + 2\sin^4\cos^4x)$

$= \sin^4x + \cos^4x + 2\sin^4x\cos^2x + 2\cos^4x \cdot \sin^2x(\cos^2x + \sin^2x)$

$= \sin^4x + \cos^4x + 2\cos^2x \cdot \sin^2x(\sin^2x + \cos^2x)$

$= (\sin^2x)^2 + (\cos^2x)^2 + 2\sin^2x \cdot \cos^2x$

$= (\sin^2x + \cos^2x)^2$

$= 1^2$

$= 1$ $\boxed{C = 1}$

$D = \sqrt{\sin^4x + 4\cos^2x} + \sqrt{\cos^4x + 4\sin^2x}$

$= \sqrt{\sin^4x + 4(1 - \sin^2x)} + \sqrt{\cos^4x + 4(1 - \cos^2x)}$

$= \sqrt{\sin^4x - 4\sin^2x + 4} + \sqrt{\cos^4x - 4\cos^2x + 4}$

$= \sqrt{(\sin^2x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2x - 2)^2}$

$= |\sin^2x - 2| + |\cos^2x - 2|$

$= 2 - \sin^2x + 2 - \cos^2x$

لأن $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ و $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

ومنه $0 \leqslant \cos^2x \leqslant 1$ و $0 \leqslant \sin^2x \leqslant 1$

إذن $\cos^2x - 2 \leqslant 0$ و $\sin^2x - 2 \leqslant 0$

إذن $D = 4 - (\sin^2x + \cos^2x)$
$= 4 - 1$
$= 3$

$$\boxed{D = 3}$$

$$E = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} + \frac{\sin x\,(1-\sin x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} + \frac{1-\cos x-\sin x+\cos x\sin x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{1-\sin^2x} + \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2x} + \frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{\cos^2x} + \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\sin^2x} + \frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{1-\sin x}{\sin x} + \frac{1-\cos x-\sin x+\sin x \cdot \cos x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\sin x(1-\sin x)+\cos x(1-\cos x)+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\sin x-\sin^2x+\cos x-\cos^2x+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{-(\sin^2x+\cos^2x)+1+\sin x \cdot \cos x}{\sin \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 1$$

تمرين 11:

1 – ليكن x من $\left]-\pi,\pi\right[/ \{0\}$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$ و $x \neq -\frac{\pi}{2}$

بين أن : $\frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2(x) = \cos^2(x) \times \frac{1}{\tan^2(x)}$

2 – ليكن x و y من $[-\pi,\pi]$ ويخالفان $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$

بين أن : $\sin^2x - \sin^2y = \frac{1}{1+\tan^2y} - \frac{1}{1+\tan^2x}$

الجواب :

1 –

$$\frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2 x = \frac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x}} - \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x$$

$$= \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)$$

$$= \cos^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \cos^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

إذن

$$(\cos^2 x) \times \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2(x)$$

2 - لدينا

$$\sin^2 x - \sin^2 y = 1 - \cos^2 x - (1 - \cos^2 y)$$

$$= - \cos^2 x + \cos^2 y$$

$$= \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y} - \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

تمرين 12 :

1 – ليكن x من المجال $[0, \pi] / \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

حدد بدلالة tan(x) مايلي :

$$A = 2\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$$

$$B = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} \ ; \ x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$C = \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

الجواب :

لدينا : $A = 2\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$

$$= 2(\tan x \cos x) . \cos x (1 - 2 (1 - \cos^2 x))$$

$$= 2\tan x . \cos^2 x (2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2\tan x \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x}\right)\left(\frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1\right)$$

$$= 2\tan x \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x}\right)\left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)$$

$$= \frac{2(\tan x)(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$$

إذن

$$\boxed{A = \frac{2(\tan x)(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}}$$

* لدينا :

$$B = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x}$$

$$= \sin^2 x + \sin x . \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 - \cos^2 x + \sin x . \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 - \sin x . \cos x$$

$$= 1 - (\tan x)(\cos x) . \cos x$$

$$= 1 - \tan x \times \cos^2 x$$

$$= 1 - \tan x \times \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$= 1 - \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x - \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

إذن

$$\boxed{B = \frac{\tan^2 x - \tan x + 1}{\tan^2 x + 1}}$$

* لدينا :

$C = \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x)$

$= 2(2\cos^2 x - 1)$

$= 2\left(\frac{2}{1+\tan^2 x} - 1\right)$

$= 2\left(\frac{2 - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan 2x}\right)$

إذن $\boxed{C = \frac{2(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x}}$

تمرين 13 :

احسب مايلي :

$A = \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

$B = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$C = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

الجواب :

لدينا :

$A = \cos\left(\frac{12\pi + 2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{24\pi - \pi}{6}\right)$
$- 2\sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2}\right)$

$= \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
$-2\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{2}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \times 1$

$= -1 - 2$

إذن $\boxed{A = -3}$

$B = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times$
$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \times$
$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) \times \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right) \times \left(\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \times \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{2 \times \sqrt{2}}{2 \times 8} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{B = \frac{\sqrt{3}}{8}}$

لدينا :

$C = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{-3}{3}$

$= -1$

إذن $\boxed{C = -1}$

تمرين 14 :

احسب مايلي :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$C = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

الجواب :

لدينا :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{7\pi - 2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{7\pi - 2\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 0$$

إذن $\boxed{A = 0}$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$- \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$- \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 0$$

إذن $\boxed{}$

$= 2 \times 1 = 2$ إذن $\boxed{C = 2}$

تمرين 15:

نعتبر التعابير التالية :

$$A = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$$

$$B = \sin\left(\frac{11\pi}{26}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{26}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

احسب A و B و C.

الجواب :

لدينا :

$$A = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$$

$$= \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{14}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$= 0$ إذن $\boxed{A = 0}$

لدينا :

$$B = \sin\left(\frac{11\pi}{26}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{26}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{13\pi - 2\pi}{26}\right) + \sin\left(\frac{13\pi - 10\pi}{26}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{13}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{13}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} - \cos\frac{\pi}{13} - \cos\frac{5\pi}{13}$$

$= 0$ إذن $\boxed{B = 0}$

لدينا :

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi + \pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi + 3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi + 5\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) - \sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}$$

$= 0$ $\quad \boxed{C = 0}$ إذن

تمرين 16 :

احسب مايلي :

$$A = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{6\pi}{7} + \cos^2\frac{8\pi}{9}$$

الجواب :

$$A = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$= 2 \times 1 = 2$ $\quad \boxed{A = 2}$ إذن

$$B = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{6\pi}{7} + \cos^2\frac{8\pi}{9}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos^2\frac{\pi}{9}\right)^2$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$$

$= 1 + 1 = 2$ $\quad \boxed{B = 2}$

تمرين 17 :

نعلم أن : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1) – احسب $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$.

2) – استنتج : $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$

3) – احسب $\cos\left(\frac{513\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{37\pi}{8}\right)$

و $\tan\left(\frac{25\pi}{8}\right)$

الجواب :

1) – نعلم أن : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

أي أن $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{4-2-\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ أو $\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

بما أن $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ فإن $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

2) - لدينا $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\boxed{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\boxed{\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

3) - $\cos\left(\frac{513\pi}{8}\right)$

$$=\cos\left(\frac{512\pi+\pi}{8}\right)$$
$$=\cos\left(64\pi+\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\cos\left(\frac{513\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

لدينا $\sin\left(\frac{37\pi}{8}\right)$

$$=\sin\left(\frac{40\pi-3\pi}{8}\right)$$
$$=\sin\left(5\pi-\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}$$

إذن $\sin\left(\frac{37\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

لدينا

$$\tan\left(\frac{25\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{24\pi + \pi}{8}\right)$$

$$= \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

إذن $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1}$

تمرين 17 :

ليكن x من المجال $[0,\pi]$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$

نضع

$$P(x) = 2\left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] - \cos(\pi - x)\sin(\pi + x)$$

1 – بسط $P(x)$ ثم احسب $P(0)$ و $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2 – أ – بين أن : $P(x) = \frac{2 - \tan x}{1 + \tan^2 x}$

ب – احسب $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $P(x)$.

3 – إذا علمت أن $P(x) = 2$ و $x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$

فاحسب $\tan x$ واستنتج x.

الجواب :

- 1

$$P(x) = 2\left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] - \cos(\pi - x)\sin(\pi + x)$$

$$= 2\left[1 - (-\sin x)^2\right] - (-\cos x)(-\sin x)$$

$$= 2(1 - \sin^2 x) - (-\cos x) \times (-\sin x)$$

$$= 2\cos^2 x - \cos x \,.\, \sin x$$

إذن $\boxed{P(x) = 2\cos^2 x - \cos x \,.\, \sin x}$

لدينا $P(0) = 2\cos^2 0 - (\cos 0) \times (\sin 0)$

$$= 2 \times 1 - 1 \times 0$$

$$= 2$$

إذن $\boxed{P(0) = 2}$

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ $\quad P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

2 – أ –

لدينا $P(x) = 2\cos^2 x - \cos x \,.\, \sin x$

$= 2\cos^2 x - \tan x \,.\, \cos x \,.\, \cos x$

$= 2\cos^2 x - (\tan x) \,.\, \cos^2 x$

$= \cos^2 x \,.(2 - \tan x)$

$= \frac{1}{1 + \tan^2 x}\left(2 - \tan x\right)$

إذن $\boxed{P(x) = \frac{2 - \tan x}{1 + \tan^2 x}}$

ب – لدينا $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \tan\frac{\pi}{3}}{2 + \tan^2\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3})^2}$

$\boxed{P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

$P(\pi) = \frac{2 - \tan \pi}{1 + \tan^2 \pi}$

$= \frac{2 - 0}{1 + 0^2}$

$= 2$

إذن $\boxed{P(\pi) = 2}$

3 - $P(x) = 2 \,;\, x \in \left[0 \,,\, \frac{\pi}{2}\right[$

لدينا $P(x) = 2$ تكافئ $\frac{2 - \tan x}{1 + \tan^2 x} = 2$

تكافئ $2 - \tan x = 2 + 2\tan^2 x$

$- \tan x = 2\tan^2 x$

أي أن $2\tan^2 x + \tan x = 0$

$\tan x\,(2\tan x + 1) = 0$

أي أن $\tan x = -\frac{1}{2}$ أو $\tan x = 0$

وبما أن $x \in \left[0 \,,\, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن : $\tan x \geqslant 0$

إذن $\tan x = 0$

وبما أن $x \in \left[0 \,,\, \frac{\pi}{2}\right[$

فإن $x = 0$

تمرين 18 :

ليكن x من المجال $]-\pi \,;\, \pi[$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$

و $x \neq -\frac{\pi}{2}$

و $P(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

1 – بين أن $P(x) = 2\,(1 + 2\tan^2 x)$

2 – أ – احسب $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ب – استنتج $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ و $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

و $P\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3 – إذا علمت أن : $P(x) = 14$

و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فاحسب $\tan x$ و $\cos x$ ثم $\sin x$

الجواب :

1 – لدينا : $P(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$=\frac{(1-\sin x)^2+(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\frac{1+\sin^2x-2\sin x+1+\sin^2x+2\sin x}{1-\sin^2x}$

$=\frac{2+2\sin^2x}{\cos^2x}$

$=\frac{2+2(1-\cos^2x)}{\cos^2x}$

$=\frac{4-2\cos^2x}{\cos^2x}$

$=\frac{2\left(2-\frac{1}{1+\tan^2x}\right)}{\frac{1}{1+\tan^2x}}$

$=\frac{2\left(\frac{2+2\tan^2x-1}{1+\tan^2x}\right)}{\frac{1}{1+\tan^2x}}$

إذن $\boxed{P(x)=2(1+2\tan^2x)}$

2 – أ – $P\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(1+2\tan^2\frac{\pi}{3}\right)$

$=2(1+2.(\sqrt{3})^2)$

$=2(1+6)$

إذن $\boxed{P\left(\frac{\pi}{3}\right)=14}$

$P\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1+2\tan^2\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(1+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)$

$=2\left(1+\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{10}{3}$

إذن $\boxed{P\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{10}{3}}$

ب – لدينا $P(x)=P(\pi-x)=P(-x)$

لدينا $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)=P\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=P\left(\frac{\pi}{3}\right)$

إذن $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)=14$

لدينا $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)=P\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=P\left(\frac{\pi}{6}\right)$

إذن $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{10}{3}$

$P\left(-\frac{\pi}{3}\right)=P\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=14$

لدينا $P\left(-\frac{\pi}{6}\right)=P\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{10}{3}$

3 – لدينا : $P(x)=14$

$2(1+2\tan^2x)=14$

$1+2\tan^2x=7$

إذن $2\tan^2x=6$

تكافئ $\tan^2x=3$

$\tan x=\sqrt{3}$ أو $\tan x=-\sqrt{3}$

بما أن $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x>0$

ومنه $\tan x = \sqrt{3}$

لدينا $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

$= \dfrac{1}{1 + (\sqrt{3})^2}$

$= \dfrac{1}{4}$

$\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{4}}$ أو $\cos x = -\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

إذن $\cos x = \dfrac{1}{2}$ أو $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

وبما أن $\cos x > 0$ فإن $\cos x = \dfrac{1}{2}$

لدينا $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x = \tan x \cos x$

$= \sqrt{3} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين 19 :

ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

و $A(x) = \cos^2 x + 3 \sin x . \cos x - 2\sin^2 x$

1 – بين أن

$A(x) = \cos^2 x (1 + 3 \tan x - 2\tan^2 x)$

2 – احسب $A(x)$ إذا علمت أن :

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ و $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

الجواب :

لدينا

$A(x) = \cos^2 x + 3 \sin x . \cos x - 2\sin^2 x$

$= \cos^2 x \left(1 + \dfrac{3\sin x . \cos x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$

$= \cos^2 x \left(1 + \dfrac{3\sin x}{\cos x} - 2 . \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)$

إذن $A(x) = \cos^2 x \left(1 + 3\tan x - 2\tan^2 x\right)$

2 – لدينا $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

إذن $\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$

ومنه $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 5$

أي أن $1 + \tan^2 x = 5$

إذن $\tan^2 x = 4$

ومنه $\tan x = 2$ أو $\tan x = -2$

وبما أن $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

فإن $\tan x > 0$

إذن $\tan x = 2$

ومنه

$A(x) = \dfrac{1}{5}(1 + 3 \times 2 - 2 \times 4)$

$= \dfrac{1}{5}(1 + 6 - 8)$

$= \dfrac{1}{5}$

إذن $\boxed{A(x) = \dfrac{1}{5}}$

تمرين 20:

ليكن x من $\mathbb{R}$. نضع

$A(x) = 3\cos(3\pi + x) - 2\sin(\pi + x)$
$- \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$

1 – احسب $A(x)$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

2 – احسب $A(0)$ ، $A\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ و $A\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

3 – احسب $[A(x)]^2$ بدلالة $\tan x$ لكل x يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

الجواب :

1 – لدينا

$A(x) = 3\cos(3\pi + x) - 2\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$

$= 3\cos(2\pi + \pi + x) + 2\sin x + \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2} - x\right)$

$= - 3\cos x + 2\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= - 3\cos x + 2\sin x - \sin x + 2\cos x$

$= \sin x - \cos x$

إذن $\boxed{A(x) = \sin x - \cos x}$

2 – لدينا $A(0) = \sin 0 - \cos 0$

إذن $A(0) = -1$

لدينا $A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= - \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}$

$= - 1 - 0$

إذن $\boxed{A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = - 1}$

لدينا $A\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

إذن $\boxed{A\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$

3 – لدينا $A(x) = \sin x - \cos x$

إذن $[A(x)]^2 = (\sin x - \cos x)^2$

$= \sin^2 x - 2\sin x . \cos x + \cos^2 x$

$= 1 - 2\sin x . \cos x$

$= 1 - 2\tan x . \cos x . \cos x$

$= 1 - 2 . \tan x . \cos^2 x$

$= 1 - 2\tan x \times \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

$= 1 - \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

$= \frac{1 + \tan^2 x - 2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

إذن $[A(x)]^2 = \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \tan^2 x}$

تمرين 21 :

ليكن x من $]0 ; \pi[$. نضع

$$E(x) = \cos^2x + 3\cos x \,.\, \sin x - 2\sin^2x$$

1 – احسب $E(0)$ و $E(\pi)$.

2 – ليكن x من المجال $\left]0 , \frac{\pi}{2}\right[$.

أ – بين أن $E(x) = -2 + 3\left(\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x}\right)$

ب – إذا علمت أن $E(x) = 1$.

فاحسب $\tan x$ ثم $\cos x$.

الجواب :

1 – لدينا

$$E(x) = \cos^2x + 3\cos x \,.\, \sin x - 2\sin^2x$$

$$E(0) = \cos^20 + 3\cos 0 \,.\, \sin 0 - 2\sin^20$$

إذن $= 1 + 3 \times 0 \times 1 - 2 \times 0^2$

$$\boxed{E(0) = 1}$$

$$E(\pi) = \cos^2\pi + 3(\cos\pi) \times (\sin\pi) - 2\sin^2\pi$$

$$= (-1)^2 + 3\,(-1)\,0 - 2\,.\,0^2$$

$$= 1$$

إذن $\boxed{E(\pi) = 1}$

2 – أ – لدينا

$$E(x) = \cos^2x + 3\cos x \,.\, \sin x - 2\sin^2x$$

$$= \cos^2x + 3\cos x \times \tan x \,.\, \cos x - 2(1 - \cos^2x)$$

$$= \cos^2x + 3\cos^2x \times \tan x - 2 + 2\cos^2x$$

$$= -2 + 3\cos^2x + 3\cos^2x \times \tan x$$

$$= -2 + 3\cos^2x(1 + \tan x)$$

$$= -2 + 3 \times \frac{1}{1+\tan^2x}(1 + \tan x)$$

إذن

$$\boxed{E(x) = -2 + 3 \times \left(\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x}\right)}$$

ب – لدينا $E(x) = 1$

تكافئ $-2 + 3\,\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x} = 1$

أي أن $3\left(\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x}\right) = 3$

ومنه $\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x} = 1$

إذن $1 + \tan x = 1 + \tan^2x$

أي أن $\tan x = \tan^2x$

أي أن $\tan x - \tan^2x = 0$

أي أن $\tan x\,(1 - \tan x) = 0$

إذن $\tan x = 1$ أو $\tan x = 0$

وبما أن $x \neq 0$ فإن $\tan x \neq 0$ و $x \in \left]0 , \frac{\pi}{2}\right[$

إذن $\tan x = 1$

لدينا $\cos^2x = \frac{1}{1+\tan^2x}$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$\cos^2x = \frac{1}{2}$$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبما أن $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين 22:

ليكن x من $\mathbb{R}$. نضع

$$A(x) = \cos^3 x + \sin^3 x + \cos(7\pi + x) - \sin(x - 9\pi)$$

1 – بين أن :

$$A(x) = -(\sin(x) + \cos(x)) . \sin(x) . \cos(x)$$

2 – احسب :

$A(0)$. $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$

3 – أ – بين أن :

$$A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = A(x)$$

ب – استنتج حساب : $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

الجواب :

1 – لدينا :

$$A(x) = \cos^3 x + \sin^3 x + \cos(6\pi + \pi + x) + \sin(x - \pi - 8\pi)$$

$$= \cos^3 x + \sin^3 x + \cos(\pi + x) + \sin(x - \pi)$$

$$= (\cos x + \sin x) \times (\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x) - \cos x - \sin x$$

$$= (\cos x + \sin x) \times (1 - \sin x \cos x) - (\cos x + \sin x)$$

$$= (\cos x + \sin x) \times (1 - \sin x . \cos x - 1)$$

$$= (\cos x + \sin x)\ (-\sin x . \cos x)$$

إذن

$$\boxed{A(x) = -(\cos x + \sin x) \times \sin x . \cos x}$$

2 – لدينا

$$A(0) = -(\sin 0 + \cos 0) \times \sin 0 \times \cos 0$$

$$= -1 \times 0 \times 1$$

$$= 0$$

إذن $\boxed{A(0) = 0}$

لدينا

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\frac{\pi}{4} . \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\sqrt{2} \times \frac{2}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $\boxed{A\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

لدينا

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\frac{\pi}{3} . \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

إذن $\boxed{A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-(3 + \sqrt{3})}{8}}$

3 – أ – لدينا :

$$A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] . \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -(\cos x + \sin x) \cos x \sin x$$

$$= A(x)$$

إذن $\boxed{A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = A(x)}$

ب – لدينا $\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

إذن $A\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه $A(0) = A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذن $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

لدينا $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

إذن $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

ومنه $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\left(\frac{\pi}{3}\right)$

وبما أن $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-(3+\sqrt{3})}{8}$

فإن $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-(3+\sqrt{3})}{8}$

تمرين 23:

علما أن : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

1 - أحسب $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

2 - احسب $\cos\frac{7\pi}{10}$, $\sin\frac{-3\pi}{10}$, و $\tan\frac{3\pi}{10}$

3 - $\sin\frac{-84\pi}{10}$; $\cos\frac{101\pi}{10}$

الجواب :

1 - نعلم أن

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

تكافئ $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$

أي أ– $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

أو $\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

وبما أن $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$

فإن $\sin\frac{\pi}{5} > 0$

ومنه $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

لدينا $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

لدينا $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= +\sin\frac{\pi}{5}$$

$$= +\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$\boxed{\sin\frac{4\pi}{5} = +\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

2 - $\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{10} + \frac{2\pi}{10}\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{5\pi - 2\pi}{10}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{10}} = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)\times\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\times\sqrt{2}\times\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}\times\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5+\sqrt{5}}}{20}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1).\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\sqrt{5}+5}}{20}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+5)\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{20}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{5+\sqrt{5}^3})}{20}$$

3 - لدينا

$$\sin\left(-\frac{84\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{-85\pi+\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(-17\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(-18\pi + \pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

إذن $\sin\left(-\frac{84\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

لدينا

$$\cos\left(\frac{101\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{100\pi+\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(20\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{5}$$

إذن $\cos\left(\frac{101\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

تمرين 24 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

* $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
* $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$
* $\sqrt{3} - 2\cos 2x = 0$
* $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

الجواب :

لدينا $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تكافئ $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

إذن

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

تكافئ $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

أي $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

إذن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

إذن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

إذن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

إذن

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\sqrt{3} - 2\cos 2x = 0$

أي أن $-2\cos 2x = -\sqrt{3}$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ أو $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

أي أن $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{4}$

إذن $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$, $2x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

إذن $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$

$$S = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

تمرين 25:

حل في R المعادلات التالية :

* $2.\cos 3x = -\sqrt{3}$
* $\sqrt{2} + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
* $\sqrt{3} + \tan 2x = 0$

الجواب :

لدينا $2.\cos 3x = -\sqrt{3}$

أي أن $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\cos 3x = -\cos\frac{\pi}{6}$

أي أن $\cos 3x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

إذن $\cos 3x = \cos\frac{5\pi}{6}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ ، $\begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن

$$S = \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\sqrt{2} + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

تكافئ $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

أي أن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$

إذن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

إذن $x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أو $k \in \mathbb{Z}$, $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

إذن $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = 2k\pi$

إذن

$$S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\sqrt{3} + \tan 2x = 0$

تكافئ $\tan 2x = -\sqrt{3}$

أي أن $\tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$, $2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

إذن $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

إذن $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

تمرين 26 :

1- حل في المجال $[0 ; 2\pi]$ المعادلة :

$$2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$$

2- حل في المجال $[-\pi ; 2\pi]$ المعادلة :

$$2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{2}$$

3- حل في المجال $[-\pi ; \pi]$ المعادلة :

$$\cos^2 x + \cos x = 0$$

4 - حل في المجال $[0 ; 3\pi]$ المعادلة :

$$\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

الجواب :

1- لدينا $2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$

أي أن $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}$

أي أن $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

أو $x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

أي أن $k\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases} x=2k\pi \\ \text{أو} \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$

* لدينا $x=2\pi k$ و $x\in[0\,;2\pi]$

إذن $0\leqslant 2\pi k\leqslant 2\pi$

أي أن $0\leqslant 2k\leqslant 2$

ومنه $0\leqslant k\leqslant 1$

وبما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن $k=1$ أو $k=0$

إذا كان $k=0$ فإن $x=0$

إذا كان $k=1$ فإن $x=2\pi$

*لدينا كذلك $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

و $x\in[0\,;2\pi]$

إذن $0\leqslant -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2\pi$

إذن $0\leqslant -\frac{2}{3}+2k\leqslant 2$

ومنه $\frac{2}{3}\leqslant 2k\leqslant \frac{8}{3}$

إذن $\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant \frac{4}{3}$

وبما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن $k=1$ إذن

إذا كان $k=1$ فإن $k=\frac{4\pi}{3}$

إذن $S=\left\{0\,;2\pi\,,\frac{4\pi}{3}\right\}$

-2 لدينا $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}$

$\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

أي أن $k\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{أو} \\ \frac{x}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$

أي أن $k\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+4k\pi \\ \text{أو} \\ x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi \end{cases}$

*لدينا $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$ و $x\in[-\pi\,;2\pi]$

إذن $-\pi\leqslant\frac{\pi}{2}+4k\pi\leqslant 2\pi$

أي أن $-1\leqslant\frac{1}{2}+4k\leqslant 2$

$-\frac{3}{2}\leqslant 4k\leqslant\frac{3}{2}$

إذن $-\frac{3}{8}\leqslant k\leqslant\frac{3}{8}$

وبما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن $k=0$

ومنه $x=\frac{\pi}{2}$

*لدينا $x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi$ و $x\in[-\pi\,;2\pi]$

إذن $-\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}+4k\pi\leqslant 2\pi$

أي أن $-1\leqslant\frac{3}{2}+4k\pi\leqslant 2$

ومنه $-\frac{5}{2}\leqslant 4k\leqslant\frac{1}{2}$

$-\frac{5}{8}\leqslant k\leqslant\frac{1}{8}$

وبما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن $k=0$

ومنه $x=\frac{3\pi}{2}$

إذن $S=\left\{\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$

3 - لدينا $\cos^2x+\cos x=0$

تكافئ $\cos x(\cos x+1)=0$

أي أن $\cos x=0$ أو $\cos x+1=0$

أي أن $\cos x=0$ أو $\cos x=-1$

إذن $x = \pi + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

* لدينا $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $x \in [-\pi ; \pi]$

إذن $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi$

$-1 \leq \frac{1}{2} + k \leq 1$

$-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$

$k \in \mathbb{Z}$ إذن $k = -1$ أو $k = 0$

$k = -1$ إذن $x = \frac{-\pi}{2}$

$k = 0$ إذن $x = \frac{\pi}{2}$

* لدينا $x = \pi + 2k\pi$ و $x \in [-\pi ; \pi]$

إذن $-\pi \leq \pi + 2k\pi \leq \pi$

أي $-2 \leq 2k \leq 0$

$-1 \leq k \leq 0$

$k \in \mathbb{Z}$ إذن $k = 0$ أو $k = -1$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = \pi$

إذا كان $k = -1$ فإن $x = -\pi$

إذن $S = \left\{\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \pi ; -\pi\right\}$

4 - لدينا $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

تكافئ $\sin x(\sin x - 2) = 0$

أي أن $\sin x = 2$ أو $\sin x = 0$

لا يمكن لأن $-1 \leq \sin x \leq 1$ أو $x = k\pi$ مع

$k \in \mathbb{Z}$

* لدينا $x = k\pi$ و $x \in [0 ; 3\pi]$

إذن $-0 \leq k\pi \leq 3\pi$

$0 \leq k \leq 3$

إذن $k = 0$ أو $k = 1$ أو $k = 2$ أو $k = 3$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = 0$

إذا كان $k = 1$ فإن $x = \pi$

إذا كان $k = 2$ فإن $x = 2\pi$

إذا كان $k = 3$ فإن $x = 3\pi$

إذن $S = \left\{0 ; \pi ; 2\pi ; 3\pi\right\}$

تمرين 27 :

1) - حل في المجال $[0 , 2\pi]$

$\cos(x) = \sin(x)$

2) - حل في المجال $[-\pi , 0]$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(x)$

3) - حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(x) = \sin(x)$

الجواب :

1) - لدينا $\cos(x) = \sin(x)$

تكافئ $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

أي أن $x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$

أو $x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أو $x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

لايمكن $0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

لدينا $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ و $x \in [0, 2\pi]$

إذن $0 \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 2\pi$

$0 \leqslant \frac{1}{4} + k \leqslant 2$

أي أن $-\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4}$

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$ أو $k = 1$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = \frac{\pi}{4}$

إذا كان $k = 1$ فإن $x = \frac{5\pi}{4}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

2) - لدينا $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(x)$

تكافئ $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x)$

أي أن $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

إذن $\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x - x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x + x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

لايمكن $0 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

إذن $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

إذن $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $x \in [-\pi, 0]$ و $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$

فإن $-\pi \leqslant -\frac{\pi}{12} + k\pi \leqslant 0$

$-1 \leqslant -\frac{1}{12} + k \leqslant 0$

إذن $-\frac{11}{12} \leqslant k \leqslant \frac{1}{12}$

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$

إذن $S = \left\{-\frac{11}{12}\right\}$

1) - لدينا $(E) : \tan(x) = \sin(x)$

$x \in D_E$ تكافئ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

لدينا (E) تكافئ $\frac{\sin x}{\cos x} = \sin(x)$

أي أن $\sin x = \cos x \cdot \sin x$

أي أن $\sin x - \cos x \cdot \sin x = 0$

أي أن $\sin x(1 - \cos x) = 0$

تكافئ $1 - \cos x = 0$ أو $\sin x = 0$

ومنه $\cos x = 1$ أو $\sin x = 0$

أي أن $x = 2k\pi$ أو $x = k\pi$

إذن $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ و $x = k\pi$

فإن $-\frac{\pi}{2} \leqslant k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$

إذن $x = 0$

إذن $S = \{0\}$

تمرين 28:

1) - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(E) \quad 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$$

2) - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(E') \quad 2\sin^2 x + (2-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$$

3) - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(E'') \quad \tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0$$

الجواب :

1) - لدينا $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

لنضع $X = \cos x$

إذن (E) تكافئ $2X^2 - 5X - 3 = 0$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

لدينا $\sqrt{\Delta} = 7$

إذن $X = \dfrac{5-7}{4}$ أو $X = \dfrac{5+7}{4}$

أي أن $X = -\dfrac{1}{2}$ أو $X = 3$

أي أن $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ أو $\cos x = 3$

$\cos x = 3$ لا يمكن

أو $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) - لدينا

$$(E') \quad 2\sin^2 x + (2-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$$

لنضع $X = \sin x$

إذن (E') تكافئ $2X^2 + (2-\sqrt{2})X - \sqrt{2} = 0$

$$\Delta = (2-\sqrt{2})^2 - 4 \times 2(-\sqrt{2})$$
$$= 2^2 - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + 8\sqrt{2}$$
$$= 2^2 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2$$
$$= (2+\sqrt{2})^2$$

إذن $\sqrt{\Delta} = 2 + \sqrt{2}$

$X = \dfrac{-2+\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{4}$ أو $X = \dfrac{-2+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{4}$

أي أن $X = -1$ أو $X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = -1$ أو $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

تكافئ $\sin x = -1$ أو $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

أو $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

إذن

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) - لدينا

$$(E'') \quad \tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$x \in D_{(E'')}$ تكافئ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

لنضع $X = \tan x$

إذن (E'') تكافئ $X^2 + (\sqrt{3}-1)X - \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = (\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 + 4\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1^2$$
$$= (\sqrt{3} + 1)^2$$

إذن $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} + 1$

ومنه $X = \dfrac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = 1$

أو $X = \dfrac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = -\sqrt{3}$

إذن $\tan x = -\sqrt{3}$ أو $\tan x = 1$

أي أن $\tan x = -\tan\dfrac{\pi}{3}$ أو $\tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$

أي أن $\tan x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ أو $\tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$

ومنه $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ أو

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

تمرين 29:

1 – حل في المجال : $[0, 2\pi]$

المتراجحة : $-1 + 2\cos x \geqslant 0$

2 - حل في المجال : $[0, 2\pi]$ المتراجحة :

$$-2\sin x + \sqrt{2} < 0$$

3 - حل في المجال : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة : $\sqrt{3} - \tan x \leqslant 0$

الجواب :

$$(I) \quad \begin{cases} x \in [0,2\pi] \\ -1 + 2\cos x \geqslant 0 \end{cases}$$

نعتبر المعادلة : $-1 + 2\cos x = 0$

أي أن $\cos x = \dfrac{1}{2}$

إذن $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

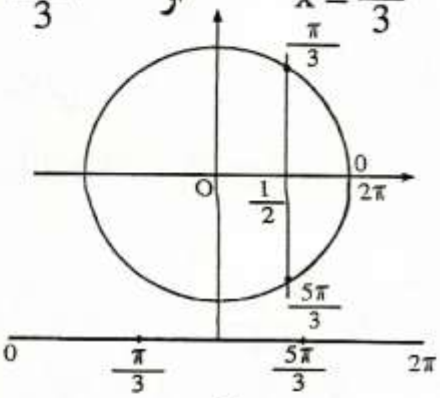
إذن :

$x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبما أن $x \in [0,2\pi]$ فإن :

$x = \dfrac{5\pi}{3}$ أو $x = \dfrac{\pi}{3}$



(I) تكافئ $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ أي أن

$\dfrac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$ أو $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$

إذن $S = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

2 - لدينا

$$(I') \quad \begin{cases} x \in [-\pi,\pi] \\ -2\sin x + \sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

تكافئ :

$$(I') \quad \begin{cases} x \in [-\pi,\pi] \\ \sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

نعتبر المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

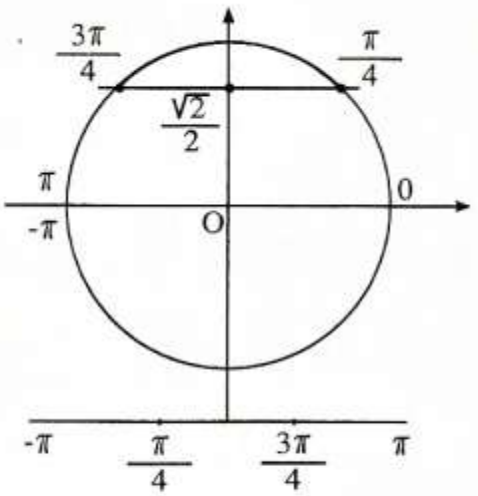
إذن :

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبما أن $x \in [-\pi, \pi]$ فإن :

$x = \frac{\pi}{4}$ أو $x = \frac{3\pi}{4}$



(I') تكافئ $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

إذن $S = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$

2 - لدينا

$$(I'') \quad \begin{cases} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \sqrt{3} - \tan x \leqslant 0 \end{cases}$$

نعتبر المعادلة : $\sqrt{3} - \tan x = 0$

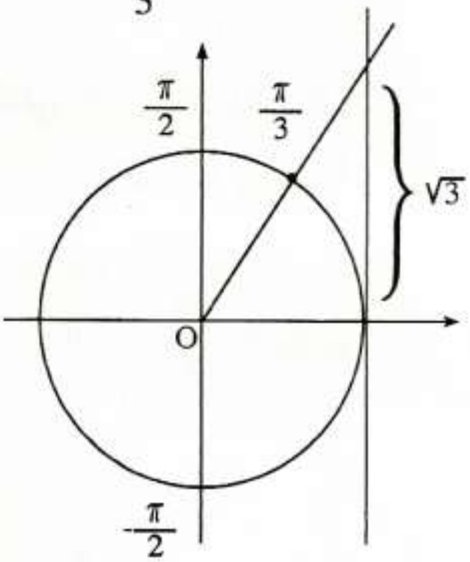
تكافئ : $\tan x = \sqrt{3}$

أي أن $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}$

بما أن $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن :

$x = \frac{\pi}{3}$



(I'') تكافئ $\tan x \geqslant \sqrt{3}$

أي أن $\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

إذن $S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

تمرين 30:

1 - حل في المجال $[0, 2\pi]$

المتراجحة : $2\cos x(2x) \geqslant \sqrt{3}$

2 - حل في المجال $[-\pi, \pi]$

المتراجحة : $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 - حل في المجال $[0, \pi[$

$\tan\frac{x}{2} < 1$

الجواب :

$(I) : \begin{cases} x \in [0,\pi] \\ 2\cos x(2x) \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$

نضع $X = 2x$

$x \in [0,\pi]$ $\qquad$ $X \in [0,2\pi]$

(I) تكافئ : $\begin{cases} X \in [0,2\pi] \\ 2\cos x\ X \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $2\cos x\ X = \sqrt{3}$

أي أن $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\cos X = \cos\dfrac{\pi}{6}$

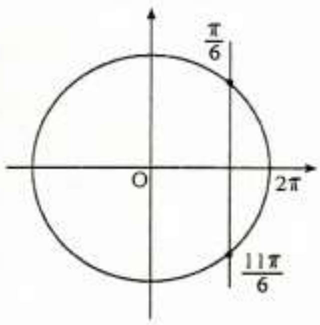
إذن :

$X = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $X = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

مع $k \in \mathbf{Z}$

بما أن $X \in [0,2\pi]$ فإن :

$X = \dfrac{11\pi}{6}$ أو $X = \dfrac{\pi}{6}$



(I') تكافئ $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

أي أن : $\dfrac{11\pi}{6} < X < 2\pi$ أو $0 < X < \dfrac{\pi}{6}$

أي أن : $\dfrac{11\pi}{6} < 2x < 2\pi$ أو $0 < 2x < \dfrac{\pi}{6}$

إذن : $\dfrac{11\pi}{12} < x < \pi$ أو $0 < x < \dfrac{\pi}{12}$

إذن : $S = \left[\dfrac{\pi}{4} , \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{12} , \pi\right]$

2 - لدينا

$(I') \begin{cases} x \in [-\pi , \pi] \\ \sin(2x + \dfrac{\pi}{4}) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $X = 2x + \dfrac{\pi}{4}$

لدينا : $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

أو $-2\pi \leqslant 2x \leqslant -2\pi$

أي أن : $-\dfrac{7\pi}{4} \leqslant 2x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{9\pi}{4}$

$(I) : \begin{cases} X \in \left[-\dfrac{7\pi}{4} , \dfrac{9\pi}{4}\right] \\ \sin X < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $\sin X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin X = \sin\dfrac{\pi}{4}$

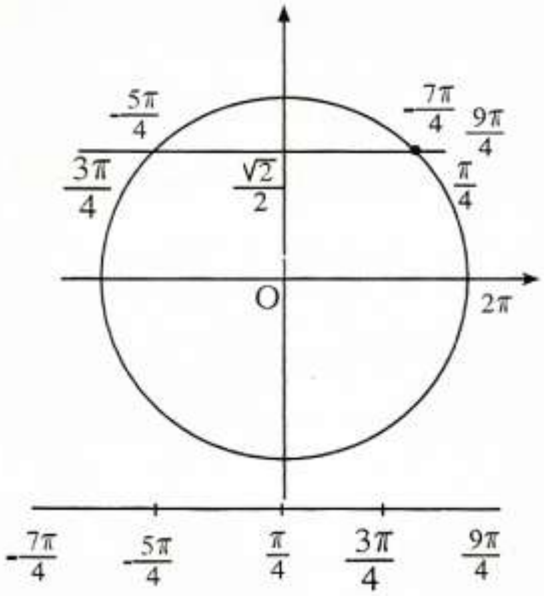
$X = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ أو $X = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

مع $k \in \mathbf{Z}$

بما أن $X \in \left[-\dfrac{7\pi}{4} , \dfrac{9\pi}{4}\right]$ فإن :

أو $X = \dfrac{9\pi}{4}$ أو $X = -\dfrac{7\pi}{4}$ أو $X = \dfrac{\pi}{4}$

$X = \frac{3\pi}{4}$ أو $X = -\frac{5\pi}{4}$



(I') تكافئ $\sin X < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{5\pi}{4} < X < \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4} < X < \frac{9\pi}{4}$

أي أن : $\frac{3\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4}$

أو $-\frac{5\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$

أي أن : $\frac{\pi}{2} < 2x < 2\pi$ أو $-\frac{3\pi}{2} < 2x < 0$

أي أن : $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ أو $-\frac{3\pi}{2} < x < 0$

إذن : $S = \left[-\frac{3\pi}{2} , 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} , \pi\right]$

3 - لدينا $(I'') : \begin{cases} x \in [0 , \pi] \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) < 1 \end{cases}$

لنضع $X = \frac{x}{2}$

$x \in [0 , \pi]$ إذن $X \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

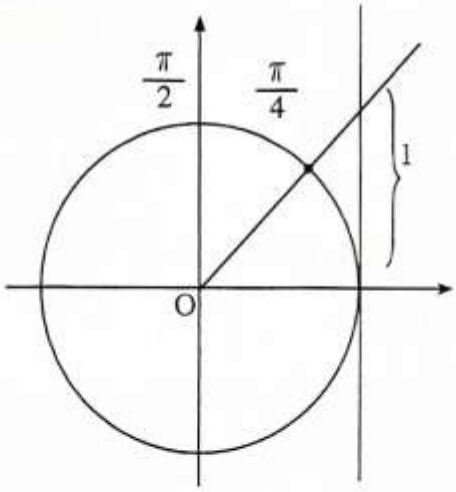
(I'') تكافئ $\begin{cases} X \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right] \\ \tan X < 1 \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $\tan X = 1$

$\tan X = \tan\frac{\pi}{4}$

$X = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

وبما أن $X \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ فإن : $X = \frac{\pi}{4}$



(I'') تكافئ $\tan X < 1$

أي أن : $0 \leq X < \frac{\pi}{4}$

أي أن : $0 \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

أي أن : $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

إذن : $S = \left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$

تمرين 31 :

ليكن لكل x من $\mathbb{R}$

$$Q(x) = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$$

1 - أ – بين أن لكل x من $\mathbb{R}$.

$$Q(x) = (2\sin x - 1)(1 - \sin x)$$

ب – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$

2 - أ – ادرس إشارة $Q(x)$ على $[-\pi, \pi]$ المجال

ب – استنتج حلول المتراجحة $Q(x) > 0$ على المجال $[-\pi, \pi]$

الجواب :

1 - أ- لدينا $(2\sin x - 1)(1 - 2\sin x)$

$= 2\sin x - 2\sin^2 x - 1 + \sin x$

$= -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

$= Q(x)$

إذن : $Q(x) = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

ب – $Q(x) = 0$ تكافئ

$(2\sin x - 1)(1 - \sin x) = 0$

أي أن $1 - \sin x = 0$ أو $2\sin x - 1 = 0$

أي أن $\sin x = 1$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = 1$ أو $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

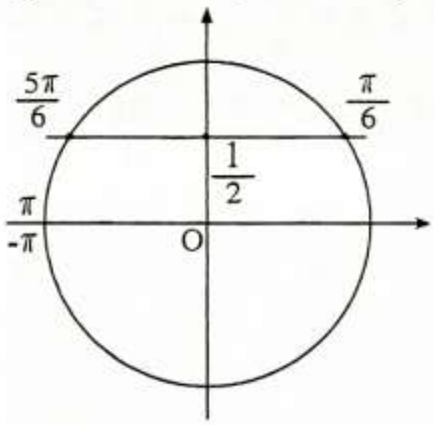
2 - أ- حلول المعادلة $Q(x) = 0$ على المجال $[-\pi, \pi]$ هي :

$x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$ أو $x = \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
1 - sinx		+		+	0	+		+	
2sinx - 1		-	0	+		+	0	-	
Q(x)		-	0	+	0	+	0	-	

ملاحظة : $1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

إذن $\sin x \leqslant 1$ أي أن $0 \leqslant 1 - \sin x$



ب – $\begin{cases} x \in [-\pi, \pi] \\ Q(x) > 1 \end{cases}$

تكافئ : $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$ أو $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

إذن $S = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[$

تمرين 32:

نعتبر لكل x من $\mathbb{R}$

$$P(x) = 2\cos^2 x + \cos x$$

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$

2 - أ- أدرس إشارة $P(x)$ لكل x من المجال $[0, 2\pi]$

ب - استنتج حلول المتراجحة $P(x) \leqslant 0$ لكل x من $[0, 2\pi]$

الجواب :

1 - $P(x) = 0$ تكافئ

$2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0$ أو $2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbf{Z}$

$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\}$

2 - أ- $P(x) = 0$ تكافئ

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

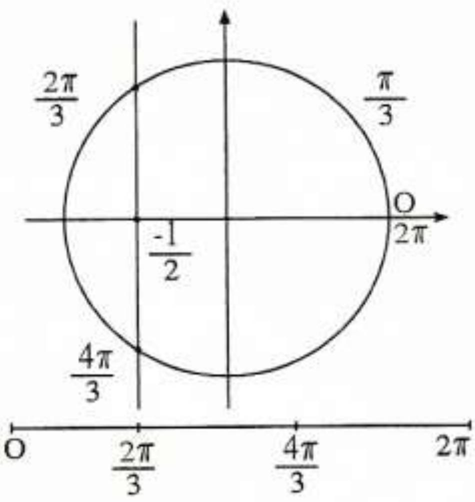
حيث $k \in \mathbf{Z}$

حلول المعادلة $P(x) = 0$ على المجال :

$[0, 2\pi]$ هي :

$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$ أو $x = \frac{4\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cosx		+	0	-		-		-	0	+	
2cosx+1		+		+	0	-	0	+		+	
P(x)		+	0	-	0	+	0	-	0	+	



$P(x) \leqslant 0$ تكافئ

$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$

إذن $S = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$