أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الحساب المثلثي الجزء الثاني

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=\frac{1}{2}$

2) حل في المجال $]-\pi,\pi]$: المعادلة $\cos x=\frac{1}{2}$

الأجوبة: 1) $\cos x=\frac{1}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) نقوم بالتأطير: أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\leq 1$

يعني $1-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+2k-\frac{1}{3}\leq 1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\leq\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\leq\frac{1}{3}$

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\leq\frac{1}{3}\simeq 0.33$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ يعني

$-1<-\frac{1}{3}+2k\leq 1$ يعني $-1+\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}+2k+\frac{1}{3}\leq 1+\frac{1}{3}$ يعني

$-\frac{2}{3}<2k\leq\frac{4}{3}$

يعني $-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{3}<k\leq\frac{2}{3}$

$-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\leq\frac{2}{3}\simeq 0.66$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=-\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$ أي : $x_1=-\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=2$

الجواب: لدينا : $a=2>1$ ومنه : فان المعادلة :

$\cos x=2$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ أي : $S=\varnothing$

تمرين3: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) حل في المجال $]-\pi,\pi]$: المعادلة $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب: 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) نقوم بالتأطير: أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\leq 1$

يعني $1-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+2k-\frac{1}{3}\leq 1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\leq\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\leq\frac{1}{3}$

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\leq\frac{1}{3}\simeq 0.33$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$ أي: $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ يعني

$-1<\frac{2}{3}+2k\leq 1$ يعني $-1+\frac{2}{3}<2k\leq 1+\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}<2k\leq\frac{5}{3}$

يعني $-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\leq\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{6}<k\leq\frac{5}{6}$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x=1$

الجواب:

$\tan x=1$ يعني $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ يعني $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقيين x و y.

$\cos x=\cos y$ تكافئ أو $\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=-y+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$
$\sin x=\sin y$ تكافئ أو $\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=(\pi-y)+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$
$\tan x=\tan y$ تكافئ $x=y+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجواب: 1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين6: 1) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\cos x=-\frac{1}{2}$

2) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب: 1) $\cos x=-\frac{1}{2}$ يعني $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$ يعني

$\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ لأن: $\cos(\pi-x)=-\cos x$

يعني $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ يعني

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $0\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le\frac{2}{3}+2k<2$

يعني $-\frac{2}{3}\le 2k<2-\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}\le k<\frac{2}{3}$

يعني $-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني

يعني $0\le-\frac{2}{3}+2k<2$ يعني $\frac{2}{3}\le2k<2+\frac{2}{3}$ يعني $\frac{1}{3}\le k<\frac{4}{3}$

يعني $0.33\simeq\frac{1}{3}<k\le\frac{4}{3}\simeq1.33$ اذن : $k=1$

ومنه :نعوض k ب 1 في $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=-\frac{2\pi}{3}+2\times1\times\pi$

أي : $x_2=\frac{4\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

لأن: $\sin(-x)=-\sin x$

$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ يعني $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $0\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le-\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $\frac{1}{4}\le2k<2+\frac{1}{4}$ يعني $\frac{1}{8}\le k<\frac{9}{8}$ اذن : $k=1$

ومنه :نعوض k ب 1 فنجد : $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times1\times\pi$ أي: $x_1=\frac{7\pi}{4}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

يعني $0\le\frac{5}{4}+2k<2$ يعني $-\frac{5}{4}\le2k<2-\frac{5}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{3}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب à فنجد : $x_2=\frac{5\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

ملخص لمعادلات خاصة:

$\cos x=1$ تكافئ $x=2k\pi$	
$\cos x=0$ تكافئ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=-1$ تكافئ $x=(2k+1)\pi$	
$\sin x=1$ تكافئ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$	
$\sin x=0$ تكافئ $x=k\pi$	$(k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=-1$ تكافئ $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	

تمرين7: حل في $[0,3\pi]$ معادلة : $\sin x=0$

الجواب: $\sin x=0$ يعني $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

نقوم بالتأطير: $0\le k\pi\le3\pi$ يعني $0\le k\le3$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_0=0\times\pi$ أو $x_1=1\times\pi$ أو $x_2=2\times\pi$ أو $x_3=3\times\pi$

أي : $x_0=0$ أو $x_1=\pi$ أو $x_2=2\pi$ أو $x_3=3\pi$

وبالتالي : $S=\{0;\pi;2\pi;3\pi\}$

تمرين8: حل في ال $[-\pi,2\pi[$ معادلة : $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

الجواب: $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ يعني $\cos x=0$ أو $\sqrt{2}\sin x-1=0$

يعني $\cos x=0$ أو $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $-\pi\le\frac{\pi}{2}+k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{2}+k<2$

يعني $-1-\frac{1}{2}\le k<2-\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le k<\frac{3}{2}$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=-1$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_1=\frac{\pi}{2}+0\times\pi$ أو $x_2=\frac{\pi}{2}+1\times\pi$ أو $x_3=\frac{\pi}{2}-1\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{2}$ أو $x_2=\frac{3\pi}{2}$ أو $x_3=-\frac{\pi}{2}$

التأطير:ب) $-\pi\le\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $-1-\frac{1}{4}\le2k<2-\frac{1}{4}$ يعني $-\frac{5}{4}\le2k<\frac{7}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{7}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_4=\frac{\pi}{4}$

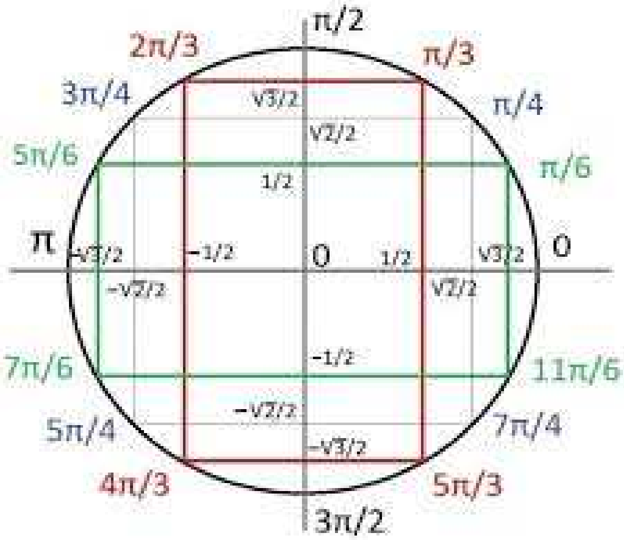
ج) نقوم بعملية التأطير : $-\pi\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

يعني $-1\le\frac{3}{4}+2k<2$ يعني $-1-\frac{3}{4}\le2k<2-\frac{3}{4}$ يعني $-\frac{7}{8}\le k<\frac{5}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_5=\frac{3\pi}{4}$

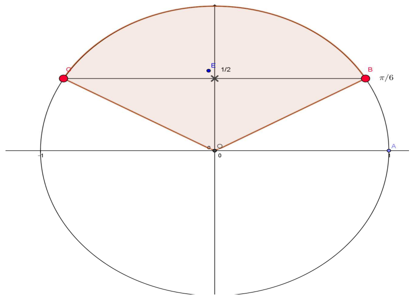
وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

أنظر الدائرة المثلثية:



تمرين9: حل في المجال : $[0,2\pi[$ المتراجحة: $\sin x \geq \frac{1}{2}$

الجواب : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ يعني $\sin x \geq \sin\frac{\pi}{6}$

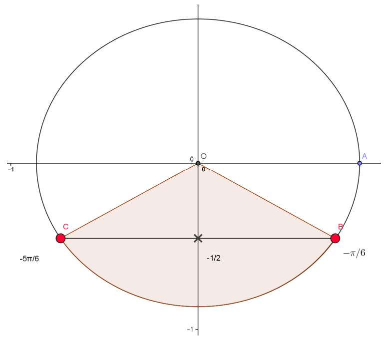


$S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

تمرين10: حل في المجال $[-\pi,\pi]$: المتراجحة: $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

الجواب

: $S=\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$



تمرين11: حل في المجال : $[-\pi,\pi]$ المتراجحة: $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

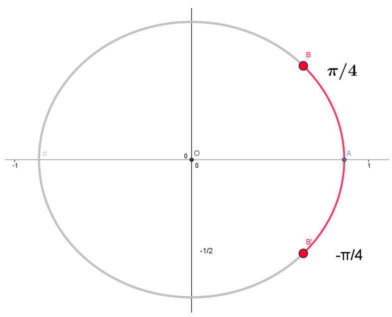
الجواب :

$S=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

تمرين12: حل في المجال : $\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ المتراجحة: $\cos x \leq \frac{1}{2}$

الجواب :

$S=\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$



تمرين13: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحات:1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

الأجوبة : 1) $S=\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 2) $S=[0,\pi]$

تمرين14: حل في المجال: $S=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة: $\tan x \geq 1$

الجواب : $S=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين15: ABC مثلث بحيث : $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$ و $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ و

$BC=4cm$

أحسب : $\hat{C}$ و $AC=b$ و AC

أجوبة: 1) حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ يعني

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\hat{C}=\pi$

يعني $\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}+\hat{C}=\pi$ يعني $\hat{C}=\pi-\frac{7\pi}{12}$ يعني $\hat{C}=\frac{5\pi}{12}$

1) حساب AC

لدينا: $\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}$ يعني $\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}}$

يعني $4\times\sin\frac{\pi}{3}=AC\times\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $AC=\frac{4\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

تمرين16: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ معادلة : $2\sin 2x-1=0$

الجواب: $2\sin 2x-1=0$ يعني $\sin 2x=\frac{1}{2}$ يعني

$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}$

يعني $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ونقوم بالتأطير

ونجد : $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$

تمرين17: حل في المجال $\mathbb{R}$ المعادلة: $(\sin x)^2+\sin x-2=0$

الجواب: نضع: $X=\sin x$ **والمعادلة تصبح :** $X^2+X-2=0$

نحسب المميز : Δ $a=1$ و $b=1$ و $c=-2$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-2)=9=(3)^2>0$ بما أن $\Delta\succ0$

فان هذه المعادلة لها حلين هما: $X_1=\frac{-1+3}{2\times1}=1$ **أو** $X_2=\frac{1-3}{2\times1}=-2$

ومنه بالرجوع للمتغير الأصلي نجد **:**

$\sin x=1$ **أو** $\sin x=-2$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi,\pi]$

اذن فقط نحل المعادلة $\sin x=1$**:** (معادلة خاصة)

$\sin x=1$ **يعني :** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **ومنه :** $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$