

الحساب المثلثي

وحدات قياس الزوايا

$(\vec{OI}, \vec{OM}) = \pi \text{ radians}$

1 radian

- ❖ قياس زاوية مستقيمة هو 180° أما قياسها بالريديان فهو π (طول نصف دائرة شعاعها 1)
- ❖ توجد وحدة قياس أخرى لقياس الزوايا وهي الغراد و قياس زاوية مستقيمة بالغراد هو 200 غراد
- ❖ إذا كانت α و β و γ هي قياسات زاوية هندسية على التوالي بالدرجة و الريديان و الغراد فإن :

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$$

الدائرة المثلثية

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1 مزودة بنقطة أصل I و موجهة توجيهها موجبا . التوجيه الموجب هو منحنى الدوران حول الدائرة انطلاقا من I في المنحنى المضاد لحركة عقارب الساعة

الأفاصل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

لتكن (\mathcal{C}) دائرة مثلثية و O مركزها و I أصلها و α عددا حقيقيا

- في حالة $\alpha > 0$ ، نعتبر النقطة M من (\mathcal{C}) بحيث القياس بالريديان لطول القوس \widehat{IM} هو α عند التنقل على (\mathcal{C}) في المنحنى الموجب
- في حالة $\alpha < 0$ ، نعتبر النقطة M من (\mathcal{C}) بحيث القياس بالريديان لطول القوس \widehat{IM} هو $-\alpha$ عند التنقل على (\mathcal{C}) في المنحنى السالب

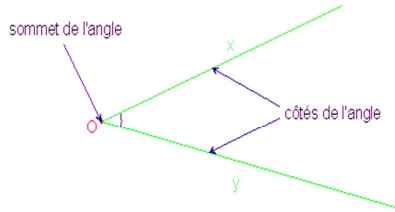
➤ في كلتا الحالتين α يسمى أفضولا منحنيا للنقطة M على (\mathcal{C}) و نكتب $M(\alpha)$
 ➤ إذا كان $\alpha \in]-\pi, \pi]$ نقول إن α هو الأفضول المنحني الرئيسي للنقطة M و هو وحيد
 ➤ $\alpha + 2k\pi$ هو أيضا أفضول منحنى للنقطة M على (\mathcal{C}) أي $M(\alpha)$ و $M(\alpha + 2k\pi)$ منطبقتان حيث
 $k \in \mathbb{Z}$

نقول أن x توافق y بترديد 2π و نكتب $x \equiv y [2\pi]$ إذا وفقط إذا كان $x = y + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

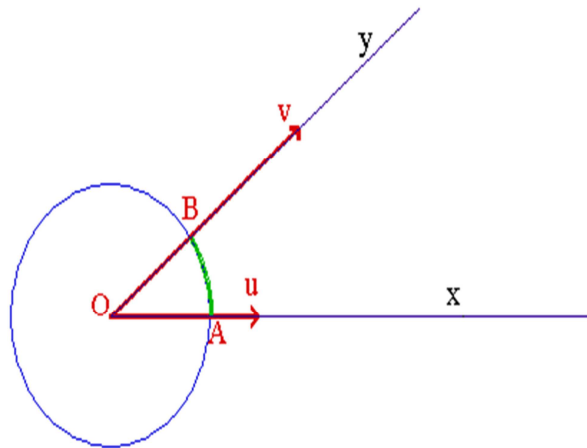
الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين لهما نفس الأصل

ليكن $([ox], [oy])$ نصفي مستقيمين لهما نفس الأصل O

- الزوج $([ox], [oy])$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{ox, oy})$
- الزوج $([oy], [ox])$ يحدد زاوية موجهة لنفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{oy, ox})$



الزوج $(\widehat{ox, oy})$ يسمى زاوية موجهة لنصفي مستقيمين $[ox]$ و $[oy]$



الزوج (\vec{u}, \vec{v}) يسمى الزاوية الموجهة للمتجهين \vec{u} و \vec{v}

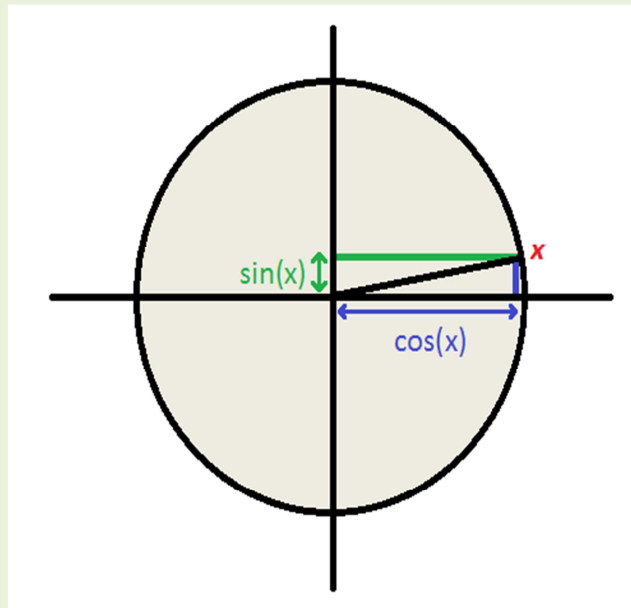
$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{u}) &= 2k\pi \quad \blacksquare \\ (\vec{u}, \vec{v}) &= -(\vec{v}, \vec{u}) + 2k\pi \quad \blacksquare \\ k \in \mathbb{Z} \text{ مع } (\vec{u}, \vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) + 2k\pi \quad \text{علاقة شال} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

النسب المثلثية لعدد حقيقي

لتكن (\mathcal{C}) دائرة مثلثية أصلها I و J النقطة من (\mathcal{O}) بحيث $\frac{\pi}{2}$ هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة (\vec{OI}, \vec{OJ})
ليكن x أفصولا منحنيا لنقطة M على الدائرة (\mathcal{C})

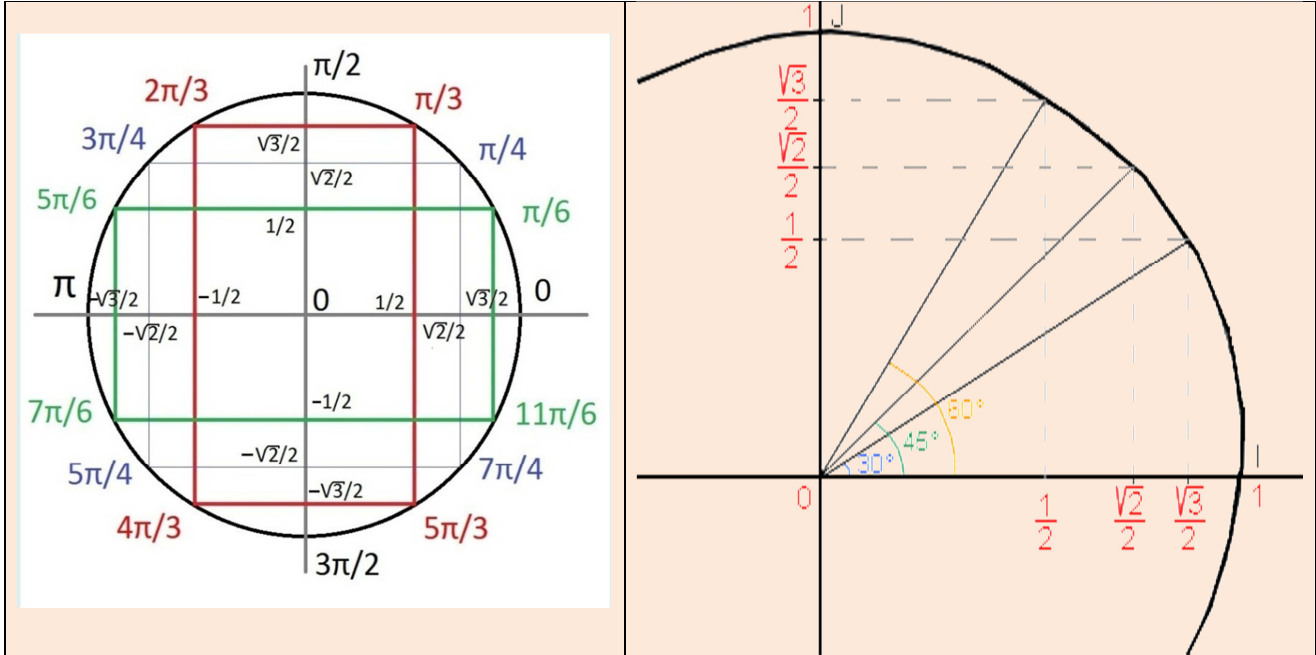
أفصول النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $(\mathcal{O}, \vec{OI}, \vec{OJ})$ يسمى جيب تمام x و نرمل له ب $\cos(x)$

أرتوب النقطة M في المعلم المتعامد الممنظم $(\mathcal{O}, \vec{OI}, \vec{OJ})$ يسمى جيب x و نرمل له ب $\sin(x)$



ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

العدد الحقيقي $\frac{\sin x}{\cos x}$ يسمى ظل x و نكتب $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$



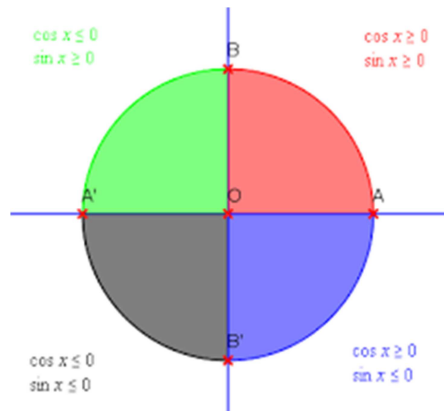
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \\ \tan(-x) = -\tan x \end{cases}$$

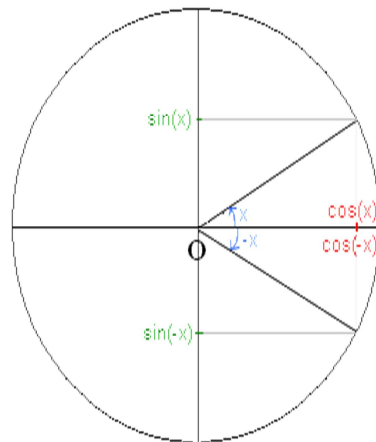
	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
sin ()	sin x	-sin x	cos x	cos x
cos ()	-cos x	-cos x	sin x	-sin x

$\tan(\)$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$
$(k \in \mathbb{Z}) \begin{cases} \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \\ \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \end{cases}$				
$(k \in \mathbb{Z}) \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$				
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$			$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	
$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$			$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	

إشارة sin و cos



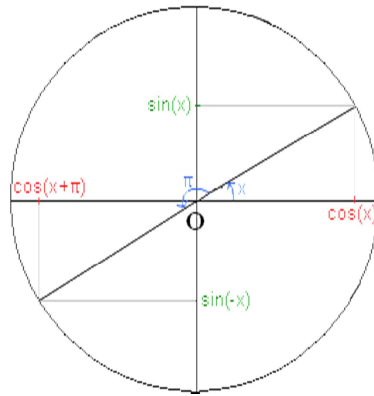
خصائص



$$\underline{\cos(-x) = \cos(x)}$$

et

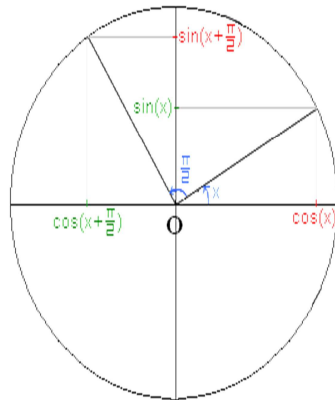
$$\underline{\sin(-x) = -\sin(x)}$$



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

et

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$



$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$$

et

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$$

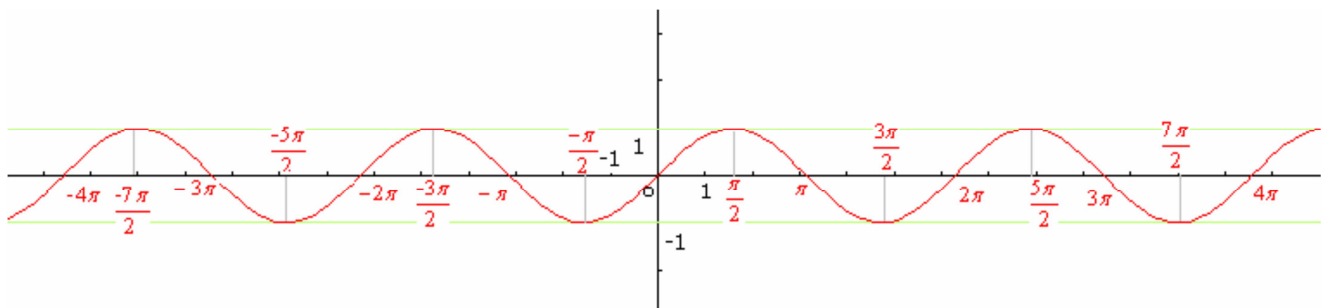
بنفس الطريقة يمكن الإشتغال على الدائرة لاستنتاج : $\sin(\pi - x)$ و $\cos(\pi - x)$ و $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ و $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

معادلات مثلثية

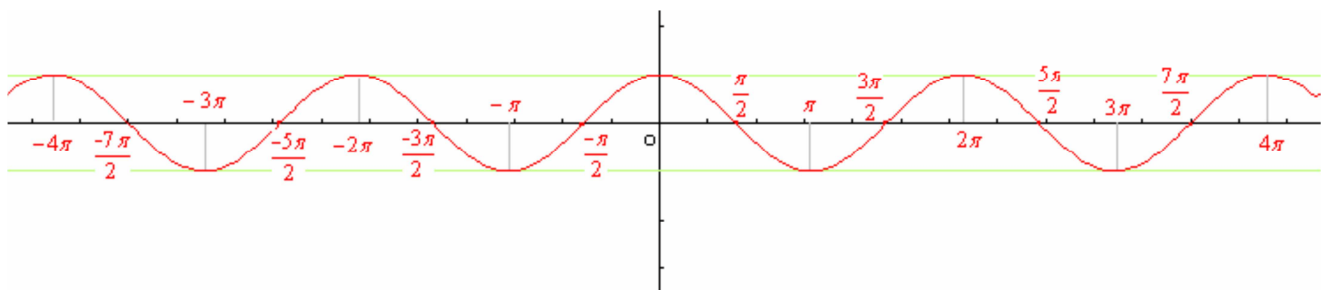
$\tan x = a$	$\sin x = a$	$\cos x = a$
<ul style="list-style-type: none"> إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ بحيث : $\tan x = a$ تكافئ $\tan x = \tan \alpha$ تكافئ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \alpha + k\pi$ 	<ul style="list-style-type: none"> إذا كان $a \in [-1, 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في \mathbb{R} إذا كان $a = 1$ تكافئ $\sin x = 1$ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ إذا كان $a = -1$ تكافئ $\sin x = -1$ 	<ul style="list-style-type: none"> إذا كان $a \in [-1, 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في \mathbb{R} إذا كان $a = 1$ تكافئ $\cos x = 1$ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = 2k\pi$ إذا كان $a = -1$ تكافئ $\cos x = -1$ $(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \pi + 2k\pi$ إذا كان $a \in]-1, 1[$

	<p>$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$</p> <p>• إذا كان $a \in]-1, 1[$ يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى</p> <p>بحيث $\sin x = a$ تكافئ $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$</p> <p>$\sin x = \sin \alpha$</p> <p>تكافئ : حالة خاصة</p> <p>$(k \in \mathbb{Z}) \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$</p> <p>حالة خاصة</p> <p>تكافئ $\sin x = 0$</p> <p>$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = k\pi$</p>	<p>يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0, \pi[$ بحيث $\cos x = a$ تكافئ</p> <p>$\cos x = \cos \alpha$</p> <p>تكافئ : حالة خاصة</p> <p>$(k \in \mathbb{Z}) \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$</p> <p>حالة خاصة</p> <p>تكافئ $\cos x = 0$</p> <p>$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$</p>
--	---	--

منحنى دالة sin



منحنى دالة cos



منحنى دالة \tan

