تمارين محلولة

تمرين1

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر $\frac{267\pi}{6}$ و $-\frac{238\pi}{3}$ الأفصولين المنحنيين للنقطتين A و B . لتكن C نقطة حيث $[2\pi]$ $\quad (\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-42\pi}{5}$.

1- حدد الأفصولين المنحنيين الرئيسين للنقطتين A و B

2- حدد القياس الرئيسي $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ ثم حدد $\cos(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$

3- حدد القياس الرئيسي $(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$

4- مثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية

تمرين2

1- أحسب $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$$B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

2- علما أن $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ حدد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{7\pi}{8}$

تمرين3

1- بسط $C = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\cdot\cos(7\pi - x) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right)\cdot\sin(3\pi + x)$

2- بين أن $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x\sin^2 x = 1$

الحل

تمرين1

1- نحدد الأفصولين المنحنيين الرئيسين للنقطتين A و B

لدينا $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$ و $\frac{267\pi}{6} = 2\times 22\pi + \frac{\pi}{2}$ حيث $\frac{\pi}{2} \in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{\pi}{2}$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة A

لدينا $B\left(-\frac{238\pi}{3}\right)$ و $-\frac{238\pi}{3} = 2\times -40\pi + \frac{2\pi}{3}$ حيث $\frac{2\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{2\pi}{3}$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة B

2- نحدد القياس الرئيسي $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ ثم نحدد $\cos(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$

$(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ و $\frac{\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$

إذن $\frac{\pi}{6}$ القياس الرئيسي $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ ومنه $\cos(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3- نحدد القياس الرئيسي $(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$

لدينا $[2\pi]$ $\quad (\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-42\pi}{5}$

حسب علاقة شال لدينا

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)+2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=-\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)+2k\pi$$

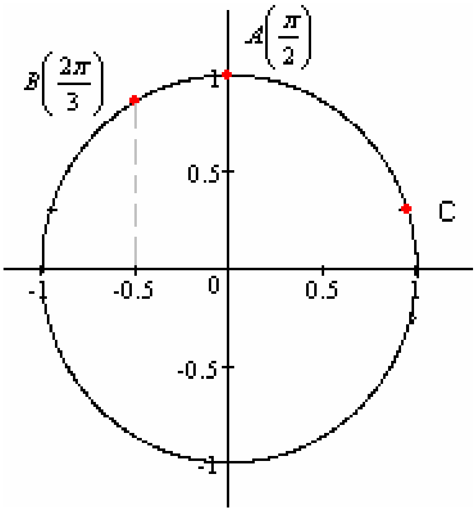
$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{42\pi}{5}+\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{257\pi}{30}+2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{17\pi}{30}+8\pi+2k\pi=\frac{17\pi}{30}+2(4+k)\pi$$

وحيث $\frac{17\pi}{30}\in\left]-\pi;\pi\right]$ فان $\frac{17\pi}{30}$ هي القياس الرئيسي $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$

-4 نمثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية



تمرين2

-1 نحسب A و B

لدينا $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}$ ومنه $\cos^2\frac{7\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}$

$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-\cos\frac{3\pi}{8}$ ومنه $\cos^2\frac{5\pi}{8}=\cos^2\frac{3\pi}{8}$

و بالتالي $A=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

لدينا $\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$ ومنه $A=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2$

لدينا $B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

ومنه

$$A+B=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$$

و بالتالي $A+B=4$ اذن $B=4-A=4-2=2$

-2 نحدد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{7\pi}{8}$

لدينا $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ نعلم أن $1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$

ومنه $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

وحيث أن $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فان $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ و $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$

و بالتالي $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{8}}=\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تمرين3

-1 نبسط $C=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(7\pi-x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(3\pi+x\right)$

لدينا $\sin\left(3\pi+x\right)=\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$

و $\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)=\cos\left(14\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

و $\cos\left(7\pi-x\right)=\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$

و $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$

إذن $C=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

-2 نبين أن $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\sin^2 x=1$

$$\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x\right)+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$=\cos^4 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$=\cos^4 x+2\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x$$

$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=1$$