ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الحساب المتجهي

1) المتجهات المستوى: عناصر متجهة:

A وB نقطتان مختلفتان. إذا رمزنا لمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان:

1. اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB).
2. منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A إلى B.
3. منظم $\vec{u}$ هو المسافة AB , و نكتب: $\|\vec{u}\| = AB$

حالة خاصة: المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم و تسمى المتجهة المنعدم, و تكتب $\overrightarrow{AA}=\vec{O}$.

خاصية1 : $\vec{u}$ متجهة و A نقطة من المستوى, توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

تعريف1: نقول إن متجهتين متساويتين إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم.

تعريف2: لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة. مقابلة المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاها عكس منحى المتجهة $\vec{u}$, و يرمز لها بالرمز $-\vec{u}$. و لدينا: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

خاصية3: ليكن $ABCD$ رباعيا. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ تكافئ $ABCD$ متوازي أضلاع.

2) علاقة شال:

A و B نقطتان من المستوى. لكل نقطة C من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

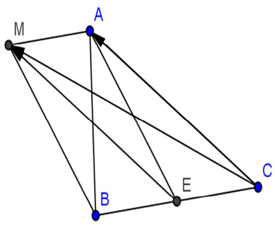
مثال: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=0$

3) قاعدة متوازي الأضلاع لإنشاء مجموع متجهتين:

O وA و B ثلاث نقط غير مستقيمية. مجموع المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{OC}$ بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع.

مثال:: ليكن ABC مثلث و لتكن E منتصف القطعة $[BC]$ و M نقطة من المستوى حيث: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

1) أرسم شكلا.
2) بين أن: $ACEM$ متوازي الأضلاع



الجواب: 1)أنظر الشكل

2)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$ يعني $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

يعني $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}$ يعني $-\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$

و منه $ACEM$ متوازي الأضلاع

4) ضرب متجهة في عدد حقيقي:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا غير منعدم. ضرب المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز $k\cdot\vec{u}$ أو $k\vec{u}$ و المعرفة كما يلي:

لها نفس اتجاه المتجهة $\vec{u}$ ولها نفس منحى المتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k \succ 0$ و لها منحى معاكس للمتجهة $\vec{u}$ في حالة: $k \prec 0$ و منظمها يساوي $|k|\times\|\vec{u}\|$.

خاصيات: لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل عددين حقيقيين k و k' لدينا:

$k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$ و $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$

و $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ و $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

$k\vec{u}=\vec{0}$ تكافئ $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$.

$0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ و $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$

5) استقامية متجهتين-استقامية ثلاث نقط:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين. $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وجد عدد حقيقي k غير منعدم حيث: $\vec{v}=k\vec{u}$

ملاحظة: المتجهة المنعدمة مستقيمية مع جميع المتجهات.

خاصية1: لتكن A و B و C و D أربع نقط حيث $A\neq B$ و $C\neq D$. $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان يعني (AB) و (CD) متوازيين.

خاصية2: تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين.

مثال: في كل شبه منحرف $ABCD$ قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$. لدينا المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان.

مثال: نعتبر النقط A و B و M بحيث: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

1. بين أن: $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$
2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

الجواب: (1 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{MA}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $-5\overrightarrow{AM}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

اذن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

2) $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ تعنى أن النقط A و B و M مستقيمية وأن M تنتمي إلى المستقيم (AB).

6) منتصف قطعة:

خاصية 1: I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت I تحقق إحدى المتساويتين: (1) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ أو (2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ أو $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

خاصية2: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة): I منتصف القطعة $[AB]$ لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

خاصية3: (خاصية منتصفي ضلعي مثلث) لبكن ABC مثلثا. إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ فان: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

ملاحظة : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **تعني أن المتجهتين** $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتين

ومنه : $(IJ)\parallel(BC)$

الأستاذ : عثماني نجيب