

الجبر

مذكرة رقم 7 : الحدوديات مع تمازين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :



توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- ينبغي تجنب إعطاء أي بناء نظري لمفهوم الحدودية ويمكن تقديمها، مع الإشارة إلى العناصر المميزة لها (الحد، الدرجة، المعامل)، من خلال أمثلة بسيطة؛ - إذا كانت تقنية القسمة لحدودية على $x - a$ تلعب دورا في تعميل حدودية أحد جذورها هو a فإنه ينبغي الاهتمام بباقي التقنيات التي تؤدي إلى هذا التعميل.	- التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على $x - a$ وإدراك قابلية القسمة على $x - a$.	- تقديم حدودية، تساوي حدوديتين؛ - جمع وضرب حدوديتين؛ - جذر حدودية، القسمة على $x - a$ ؛ - تعميل حدودية.

I تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

(1) تقديم حدودية: أمثلة و تعاريف: مثال 1:

$$\text{التعبير } P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{3} \text{ يسمى حدودية}$$

$$\frac{1}{2}x^3 \text{ يسمى حد الحدودية من الدرجة 3.}$$

$$-\sqrt{2}x^2 \text{ يسمى حد الحدودية من الدرجة 2.}$$

$$x \text{ يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. } -\frac{1}{3} \text{ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0}$$

$$\text{الحد الأكبر درجة هو } \frac{1}{2}x^3 \text{, العدد 3 يسمى درجة الحدودية. و نكتب}$$

$$d^0 P = 3$$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و نكتب على شكل:

$$ax + b \text{ حيث } a \in \mathbb{R}^*.$$

مثال 3: التعبير $x^2 + 2\sqrt{x} + 5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على \sqrt{x} .

مثال 4: الحدودية: $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ درجتها 4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4. 1 هو معامل الحد من الدرجة 3، 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

-7 هو معامل الحد من الدرجة 1، $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$

.....

نعتبر الحدودية: $P(x) = 4x^2 - x^3 + x^4 + 3 + x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$ على شكل:

$$P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 3$$

نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.

تمرين 1: حدد من بين التعابير التالية الحد وديات و درجتها ان أمكن بحيث

$$a \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x} \text{ و } P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{3}$$

$$M(x) = \frac{5}{3}x^2 + x + 2 - 7x^4 \text{ و } R(x) = 5|x^2| + 4|x| - 5$$

$$E(x) = (a-1)x^4 + x^2 + x + 1 \text{ و } O(x) = 4 \text{ و } N(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 3$$

الجواب: $P(x)$ حدودية و $d^0 P = 3$ و $Q(x)$ ليست بحدودية.

و $R(x)$ ليست بحدودية.

$M(x)$ حدودية و $d^0 P = 4$

$$O(x) \text{ حدودية و } d^0 P = 0$$

$$E(x) \text{ حدودية.}$$

$$\text{الحالة 1: } a = 1 \text{ } d^0 P = 2 \text{ الحالة 2: } a - 1 \neq 0 \text{ يعني } a \neq 1$$

$$d^0 P = 4$$

(2) تعريف: الحدودية المنعدمة هي الحدودية التي جميع معاملاتها تساوي صفرا.

$$\text{أي } P(x) = 0 \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}.$$

ملحوظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

(3) تساوي حدوديتين:

نشاط: نعتبر الحدوديتين التاليتين:

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \text{ و } Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3)$$

1. حدد درجة الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$

2. ماذا تلاحظ؟

الجواب على النشاط (1): $d^0 P = 3$

لا يمكن تحديد درجة الحدودية $Q(x)$ الا بعد النشر والتبسيط

$$Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) = 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \text{ ومنه } d^0 Q = 3$$

(2) نلاحظ أيضا أن معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية

$$\text{نقول ان: } Q(x) = P(x)$$

خاصية: تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

تمرين 2: نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$$P(x) = (a-1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$$

$$\text{و } Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + (3+a)x + 3a$$

حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$

و $Q(x)$ متساويتين.

الجواب:

$$a \neq 1 \text{ إذن: } a - 1 \neq 0 \text{ ومنه: } d^0 P = 3 \text{ ولدينا أيضا } d^0 Q = 3$$

$$\text{إذن: } d^0 P = d^0 Q$$

$$Q(x) = P(x) \text{ يعني أن: } \begin{cases} a-1=1 \\ 2a=4 \\ 3+a=5 \\ 3a=6 \end{cases}$$

تمرين 3: أدرس تساوي الحدوديتين في الحالات التالية:

$$1. \text{ } P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x \text{ و } Q(x) = x^2(3x-2) + x$$

$$2. \text{ } P(x) = (x-1)^3 \text{ و } Q(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

(الجواب : 1)

$$P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x = x^3 + 2x^3 - 2x^2 + x = 3x^3 - 2x^2 + x$$

$$Q(x) = x^2(3x-2) + x = 3x^3 - 2x^2 + x = P(x)$$

$$P(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad (2)$$

إذن: $P(x) \neq Q(x)$ لأن معاملات الحد من الدرجة 1 غير متساوية ($3 \neq -3$)

II. جمع و ضرب حدوديتين:

نشاط 1: أحسب مجموع الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$$P(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{و} \quad Q(x) = x^3 - x^2 + 2$$

ثم قارن: $d^0(P+Q), \dots, d^0P + d^0Q$

$$P(x) + Q(x) = (x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 2) = x^3 + x + 3$$

$$d^0(P+Q) \leq d^0P + d^0Q$$

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها

بالرمز $P(x) + Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$$d^0(P+Q) \leq d^0P + d^0Q \quad \text{في حالة} \quad P(x) + Q(x) \quad \text{حدودية غير منعدمة.}$$

تمرين 4: نعتبر الحدوديتين التاليتين:

$$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad \text{و} \quad Q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$$

حدد: $P(x) + Q(x)$ و $P(x) - Q(x)$

$$P(x) + Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 3x^3 + 3x^2 + x$$

$$P(x) - Q(x) = (5x^3 - 2x^2 + 3x + 1) - (-2x^3 + 5x^2 - 2x - 1)$$

$$P(x) - Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 + 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

$$P(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 5x + 2$$

$$P(x) - Q(x) = 7x^3 - 7x^2 + 5x + 2$$

نشاط 2: أحسب جذاء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$$P(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{و} \quad Q(x) = x^3 - x^2 + 2$$

ثم قارن: $d^0(P \times Q), \dots, d^0P + d^0Q$

$$P(x) \times Q(x) = (x^2 + x + 1) \times (x^3 - x^2 + 2)$$

$$= x^5 - x^4 + 2x^2 + x^4 - x^3 + 2x + x^3 - x^2 + 2$$

$$= x^5 + x^2 + 2x + 2$$

$$d^0(P \times Q(x)) = d^0P(x) + d^0Q(x) \quad \text{اذن}$$

خاصية 3: جذاء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها

بالرمز $P(x) \times Q(x)$.

خاصية 4: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$$d^0(P \times Q(x)) = d^0P(x) + d^0Q(x)$$

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x - \alpha$:

نشاط: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

أحسب: $P(1)$ و $P(2)$ و $P(3)$ و $P(-2)$

$$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

$$P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 8 - 8 - 10 + 6 = -4 \neq 0$$

$$P(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$$

نقول 1 جذر للحدودية $P(x)$ (نفس الجواب بالنسبة ل 3 و -2)

1 جذر حدودية:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha) = 0$.

α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

نشاط: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = 2x^2 - x - 1$

1. بين أن 1 جذر للحدودية $P(x)$

$$2. \text{ تأكد أن: } P(x) = (x-1)(2x+1)$$

الجواب (1): $P(1) = 2 \times 1^2 - 1 - 1 = 0$ إذن 1 جذر للحدودية $P(x)$

$$(2) \quad P(x) = (x-1)(2x+1) = 2x \times x + x - 2x - 1 = 2x^2 - x - 1 = P(x)$$

$$\text{اذن } P(x) = (x-1)(2x+1)$$

نقول $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2 قابلية القسمة على $x - \alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$

$$\text{بحيث: } P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

1. بين أن -3 جذر للحدودية $P(x)$

2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x) = (x+3)Q(x)$

الجواب (1): -3 جذر للحدودية: لأن $P(-3) = 0$

(2) إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x+3$, و منه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث:

$$P(x) = (x+3)Q(x) \quad \text{لدينا} \quad P(x) \text{ درجتها 3 و } Q(x) \text{ درجتها 1}$$

إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

تحديد $Q(x)$:

الطريقة 1: لدينا: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

$$P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$$

$$\text{يعني أن: } x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = (x+3)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$$

حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا: $a = 1$ و $b + 3a = 3$ و

$$c + 3b = -2 \quad \text{و} \quad 3c = -6$$

يعني أن: $a = 1$ و $b = 0$ و $c = -2$ إذن: $Q(x) = x^2 - 2$.

$$\text{الطريقة 2: } Q(x) = (x^2 - 2)$$

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = x^2(x+3) - 2(x+3)$$

$$\text{و منه } Q(x) = x^2 - 2$$

الطريقة 3: إنجاز القسمة الاقليدية

**مراحل انجاز القسمة
الاقليدية:**

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \\ -x^3 - 3x^2 \\ \hline -2x - 6 \\ 2x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x + 3$$

$$x^2 - 2$$

تمرين 5: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$

2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x) = (x - 3) \times Q(x)$

الجواب (1): 3 جذر للحدودية: لأن $P(3) = 0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$

(2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - 3$ فنجد:

$$P(x) = (x - 3) \times (2x^2 + x - 1)$$

تمرين 6: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x) = 2x^2 + x - 3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

2. عمل الحدودية $P(x)$

الجواب:

(1) 1 جذر للحدودية: لأن $P(1) = 0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

(2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - 1$ فنجد:

$$P(x) = (x - 1) \times (2x + 3)$$

تمرين 7: نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

1. أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x + 2$.

2. وبين أن $Q(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$.

3. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب (1):

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$x + 2$$

$$-x^3 - 2x^2$$

$$x^2 - 4x + 3$$

$$-4x^2 - 5x + 6$$

$$4x^2 + 8x$$

$$3x + 6$$

$$-3x - 6$$

$$0$$

(2) 3 جذر للحدودية $Q(x)$: لأن $Q(3) = 0$ ومنه $Q(x)$ تقبل القسمة على

$$x - 3$$

(3) وجدنا حسب السؤال 1 $P(x) = (x + 2) \times (x^2 - 4x + 3)$

وجدنا حسب السؤال 2 $Q(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$

ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x - 3$

$$Q(x) = (x - 3) \times (x - 1)$$

ومنه: $P(x) = (x + 2) \times (x - 3) \times (x - 1)$

تمرين 2: نعتبر الحدودية $P(x)$ المعرفة بما يلي:

$$P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$$

1. تحقق من أن 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.

2. بين أنه إذا كانت α جذرا للحدودية $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر

للحدودية $P(x)$.

3. بين أن العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.

4. بانجاز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - 2$, حدد الحدودية $Q(x)$

$$P(x) = (x - 2)Q(x)$$

5. استنتج أن: $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

6. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون: $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$

7. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب (1): $P(0) = 2 \neq 0$ ومنه 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.

(2) α جذر للحدودية $P(x)$ يعني $P(\alpha) = 0$ يعني:

$$2\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 9\alpha + 2 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - 9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + 14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 9\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 2\left(\frac{1}{\alpha^4}\right) - 9\left(\frac{1}{\alpha^3}\right) + 14\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) - 9\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{2}{\alpha^4}\right) + \left(\frac{-9\alpha}{\alpha^4}\right) + \left(\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}\right) + \left(\frac{-9\alpha^3}{\alpha^4}\right) + 2\frac{\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2 - 9\alpha + 14\alpha^2 - 9\alpha^3 + 2\alpha^4}{\alpha^4}$$

وبما أنه لدينا: $2\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 9\alpha + 2 = 0$

$$\text{فان: } P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{0}{\alpha^4} = 0$$

ومنه $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.

$$P(2) = 2 \times 2^4 - 9 \times 2^3 + 14 \times 2^2 - 9 \times 2 + 2 = 32 - 72 + 56 - 18 + 2 = 3$$

$$P(2) = 2 \times 2^4 - 9 \times 2^3 + 14 \times 2^2 - 9 \times 2 + 2 = 32 - 72 + 56 - 18 + 2 = 0$$

ومنه العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.

(4) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - 2$

$$P(x) = (x - 2) \times (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)$$

(5) وجدنا حسب سؤال سابق أن 2 جذر للحدودية $P(x)$. إذن حسب السؤال السؤال

(2) فان $\frac{1}{2}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$. يعني: $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

يعني : $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ وحيث أنه لدينا : $P(x) = (x-2)Q(x)$

فان : $\left(\frac{1}{2}-2\right) \times Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ أي $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ لأن $\left(\frac{1}{2}-2\right) \neq 0$

(6) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x - \frac{1}{2}$ فنجد :

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) \text{ أي : } a = 2 \text{ و } b = -4 \text{ و } c = 2$$

(7) لدينا $P(x) = (x-2)Q(x)$ و $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2)$

$$P(x) = (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) \text{ إذن:}$$

يجب أيضا تعميل : $2x^2 - 4x + 2$

بملاحظة أن جذر للحدودية $2x^2 - 4x + 2$

ويقسمه $2x^2 - 4x + 2$ على $(x-1)$ نجد

أن : $2x^2 - 4x + 2 = (x-1)(2x-2)$ وبالتالي:

$$P(x) = (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2) = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$$