الهندسة

مذكرة رقم14 : ملخص لدرس: الجداء السلمي مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تعريف وخاصيات؛ - الصيغة المثلثية؛ - تعامد متجهتين؛ - بعض تطبيقات الجداء السلمي: . العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية؛ . مبرهنة المتوسط؛ . مبرهنة الكاشي.	- التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي. - استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية. - استعمال مبرهنة الكاشي ومبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية.	- يتم تقديم الجداء السلمي وخاصياته انطلاقا من الإسقاط العمودي. - ينبغي التأكيد على دور هذه الأداة في تحديد بعض المحلات الهندسية في المستوى وفي حساب الأطوال والمساحات وقياسات الزوايا. - تعتبر الصيغة التحليلية للجداء السلمي خارج المقرر.

I. تعاريف: تعريف 1: الجداء السلمي لمتجهتين:

لتكن $\vec u$ و $\vec v$ متجهتين من المستوى بحيث: $\vec u=\overrightarrow{AB}$ و $\vec v=\overrightarrow{AC}$

و H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec u$ و $\vec v$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec u\cdot\vec v$ و المعروف بما يلي:

- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى فان:
  $\vec u\cdot\vec v=AB\times AH$
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان فان:
  $\vec u\cdot\vec v=-AB\times AH$
- و نكتب $\vec u\cdot\vec v=AB\cdot AH$ أو $\vec u\cdot\vec v=AB\cdot AC$

تعريف 2: الصيغة المثلثية للجداء السلمي:

إذا كانت $\vec u$ و $\vec v$ متجهتين غير منعدمتين و α هو قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ حيث $\vec u=\overrightarrow{AB}$ و $\vec v=\overrightarrow{AC}$ فان:

$\vec u\cdot\vec v=\|\vec u\|\|\vec v\|\cos\alpha$ **نتيجة:** $\cos\alpha=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\|\vec v\|}$

مثال أو تمرين1 : ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين $\vec u$ و $\vec v$

حيث: $\|\vec u\|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec v\|=4$ أحسب $\vec u\cdot\vec v$

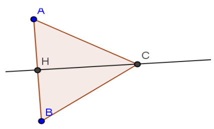
الجواب: $\vec u\cdot\vec v=\|\vec u\|\times\|\vec v\|\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\times4\times\frac{\sqrt2}{2}=5\sqrt2$

تمرين2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فان كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\frac{\pi}{3}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat A=AB\times AC\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times6\times\frac12=18$

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}=\|\overrightarrow{CH}\|\times\|\overrightarrow{HB}\|\times\cos\hat H=CH\times HB\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=CH\times HB\times0=0$

تمرين3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF=5$ و $EG=3$ و $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=-6$ أحسب $\cos\left(\widehat{FEG}\right)$

الجواب: $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\|\overrightarrow{EF}\|\times\|\overrightarrow{EG}\|\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $EF\times EG\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $5\times3\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$

تمرين4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الجواب: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat A=AB\times AC\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=12\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

لأن: $\cos(\pi-x)=-\cos x$ اذن :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12\times\frac12=-6$

II. خاصيات الجداء السلمي:

لتكن $\vec u$ و $\vec v$ و $\vec w$ ثلاث متجهات:

- $\vec u\cdot\vec v=\vec v\cdot\vec u$
- $\vec u\cdot\left(\vec v+\vec w\right)=\vec u\cdot\vec v+\vec u\cdot\vec w$
- $\vec u\cdot\left(k\vec v\right)=k\vec u\cdot\vec v$ مهما يكن k من $\mathbb{R}$.

ملاحظة: $\vec u\cdot\vec u=\|\vec u\|^2$ نرمز ل $\vec u\cdot\vec u$ ب $\vec u^2$: و يسمى المربع السلمي,

- $\vec u^2=\|\vec u\|^2$ اذن $\|\vec u\|=\sqrt{\vec u^2}$
- و اذا كانت $\vec u=\overrightarrow{AB}$ فان $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

المتطابقات الهامة:

$\left(\vec u+\vec v\right)^2=\|\vec u+\vec v\|^2=\|\vec u\|^2+2\vec u\cdot\vec v+\|\vec v\|^2$

$\left(\vec u-\vec v\right)^2=\|\vec u+\vec v\|^2=\|\vec u\|^2-2\vec u\cdot\vec v+\|\vec v\|^2$

$\left(\vec u+\vec v\right)\left(\vec u-\vec v\right)=\|\vec u\|^2-\|\vec v\|^2$

تمرين5: لتكن $\vec u$ و $\vec v$ متجهتين بحيث: $\|\vec u\|=5$ و $\|\vec v\|=3$ و $\vec u\cdot\vec v=-\frac{3}{2}$

أحسب $\vec u^2$ و $\vec v^2$ و $\left(\vec u+\vec v\right)^2$ و $\left(\vec u-\vec v\right)^2$ و $\left(\vec u-\vec v\right)\left(\vec u+\vec v\right)$ و $\left(3\vec u-2\vec v\right)\cdot\left(\vec u+5\vec v\right)$ و $\left(5\vec u-\vec v\right)\cdot\left(5\vec u+\vec v\right)$

الجواب: $\vec u^2=\|\vec u\|^2=5^2=25$ و $\vec v^2=\|\vec v\|^2=3^2=9$

$(\vec u+\vec v)^2=\vec u^2+2\vec u\cdot\vec v+\vec v^2=\|\vec u\|^2+2\vec u\cdot\vec v+\|\vec v\|^2=5^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)+3^2=25-3+9=31$

$(\vec u-\vec v)^2=\vec u^2-2\vec u\cdot\vec v+\vec v^2=\|\vec u\|^2-2\vec u\cdot\vec v+\|\vec v\|^2=5^2-2\left(-\frac{3}{2}\right)+3^2=25+3+9=37$

$(\vec u-\vec v)(\vec u+\vec v)=\vec u^2-\vec v^2=\|\vec u\|^2-\|\vec v\|^2=5^2-3^2=25-9=16$

$(3\vec u-2\vec v)\cdot(\vec u+5\vec v)=3\vec u\cdot\vec u+3\vec u\cdot5\vec v-2\vec v\cdot\vec u-2\vec v\cdot5\vec v$

$(3\vec u-2\vec v)\cdot(\vec u+5\vec v)=3\vec u^2+15\vec u\cdot\vec v-2\vec u\cdot\vec v-10\vec v^2=3\times25+13\vec u\cdot\vec v-10\times9$

$(3\vec u-2\vec v)\cdot(\vec u+5\vec v)=75+13\left(-\frac{3}{2}\right)-90=-15-\frac{39}{2}=-\frac{69}{2}$

$(5\vec u-\vec v)\cdot(5\vec u+\vec v)=(5\vec u)^2-(\vec v)^2=25(\vec u)^2-(\vec v)^2=25\times25-9=616$

خاصية: تكون $\vec u$ و $\vec v$ متعامدتين إذا و فقط إذا كان $\vec u\cdot\vec v=0$ و نكتب $\vec u\perp\vec v$

نتيجة: $(AB)\perp(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

III. علاقات مترية في مثلث قائم الزاوية:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

إذا كان ABC قائما في A فان:

1) $AB^2+AC^2=BC^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

2) $AC\times AB=AH\times BC$

3) $BA^2=BH\times BC$ أو $CA^2=CH\times BC$

4) $AH^2=HB\times HC$

براهين: 1) $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$

لدينا: $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$ لأن ABC قائما في A اذن: $BC^2=BA^2+AC^2$

2) باعتبار المثلث (ABC) : $\sin\hat B=\frac{AC}{BC}$ و باعتبار المثلث : (ABH) : $\sin\hat B=\frac{AH}{AB}$ ومنه $\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}$ ومنه : $AC\times AB=AH\times BC$

3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

باعتبار المثلث : (ABC) : $\cos\hat A=\frac{AB}{AC}$

و باعتبار المثلث : (ABH) : $\cos\hat B=\frac{BH}{AB}$ ومنه $\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AB}$

ومنه $AC^2=CH\times BC$

تمرين 6 :مثال: ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC). أحسب : AC و BH و AH و HC علما أن : $AB=2cm$ و $BC=5cm$

الجواب: حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان: $BC^2=AB^2+AC^2$

يعني : $AC^2=BC^2-AB^2$ يعني : $AC^2=5^2-2^2=21$

يعني : $AC=\sqrt{21}cm$

وحسب العلاقات المترية لدينا: $AB^2=BH\times BC$

يعني : $BH=\frac{AB^2}{BC}=\frac{4}{5}cm$

ولدينا: $AC^2=CH\times CB$ يعني : $CH=\frac{AC^2}{BC}=\frac{21}{5}cm$

ولدينا: $AB\times AC=AH\times BC$ يعني : $AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{2\sqrt{21}}{5}cm$

IV. مبرهنة الكاشي:

خاصية: ليكن ABC مثلثا

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

نتائج:

1. $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

2. $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

3. هناك علاقتين مماثلتين للعلاقة الأولى:

$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times\cos\left(\widehat{ACB}\right)$

$AC^2=BA^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$

تمرين 7: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$ و $AC=8$ و $AB=5$. 1) أحسب BC . 2) $\cos\widehat{ACB}$

الجواب:1) حساب BC

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2=5^2+8^2-2\times8\times5\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2=89-80\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ لأن : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

يعني : $BC^2=89+80\left(\frac{1}{2}\right)$ يعني : $BC^2=89+40$ يعني : $BC^2=129$

يعني : $BC=\sqrt{129}$

2) حساب $\cos\widehat{ACB}$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos\widehat{ACB}$

يعني : $5^2=8^2+\left(\sqrt{129}\right)^2-2\times8\times\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $25=64+129-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $25-193=-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $-168=-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$ يعني :

$\cos\widehat{ACB}=\frac{-168}{-16\sqrt{129}}=\frac{168\sqrt{129}}{2064}=\frac{21\sqrt{129}}{258}=\frac{7\sqrt{129}}{86}$

V. مبرهنة المتوسط:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$

لدينا: $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

تذكير: *مبرهنة المتوسط:* إذا كانت A و B نقطتين من المستوى P و I منتصف القطعة $[AB]$ فان . $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مثال: ليكن ABC مثلثا بحيث: $BC=4cm$ و $AC=6cm$ و $AB=3cm$ و لتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI .

الجواب: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني : $3^2+6^2=2AI^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني : $9+36=2AI^2+\frac{16}{2}$ يعني : $45-8=2AI^2$ يعني : $37=2AI^2$

يعني : $AI^2=\frac{37}{2}$ يعني : $AI=\sqrt{\frac{37}{2}}$

تمرين 8 : ليكن ABM مثلثا بحيث: $AB=4cm$ و $AM=3cm$ و $BM=4cm$

و لتكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$

أحسب المسافات MI و AK و BJ

الجواب: حساب MI: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ يعني: $3^2+4^2=2MI^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني: $9+16=2MI^2+\frac{16}{2}$ يعني: $25-8=2MI^2$ يعني: $17=2MI^2$

يعني: $MI^2=\frac{17}{2}$ يعني: $MI=\sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب AK: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2+AM^2=2AK^2+\frac{1}{2}BM^2$ يعني: $2^2+3^2=2AK^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني: $25-8=2AK^2$ يعني: $17=2AK^2$

يعني: $AK^2=\frac{17}{2}$ يعني: $AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب BJ: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2+BM^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AM^2$ يعني: $4^2+4^2=2BJ^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني: $32-\frac{9}{2}=2BJ^2$ يعني: $\frac{55}{2}=2BJ^2$

يعني: $BJ^2=\frac{55}{4}$ يعني: $BJ=\sqrt{\frac{55}{4}}$ يعني: $BJ=\frac{\sqrt{55}}{2}$

تمرين 9: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $AC=\sqrt{2}$ و $CB=2$

ولتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

(1 بين أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ واستنتج $\cos\hat{A}$

(2 اكتب : $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

(3 أحسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

(4 أحسب AD

(5 ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

أحسب AI و BJ

الجواب:(1) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

اذن : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

بالتعويض نجد: $2^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني: $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ يعني: $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

استنتاج : $\cos\hat{A}$: لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

يعني: $-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني: $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$ يعني:

$$\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(2 $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{DA}$ يعني: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$

يعني: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$

(3 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

ومنه : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ أي : ABD قائم الزاوية في A

(4 لدينا: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$ اذن : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})\right)^2$

اذن : $AD^2=\frac{1}{9}\left((\overrightarrow{AB})^2+(2\overrightarrow{AC})^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$ اذن : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

(5 حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

يعني: $3=2AI^2+2$ يعني: $3-2=2AI^2$ يعني: $1=2AI^2$

يعني: $AI^2=\frac{1}{2}$ يعني: $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني: $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$

يعني: $5=2BJ^2+1$ يعني: $5-1=2BJ^2$ يعني: $4=2BJ^2$

يعني: $BJ^2=2$ يعني: $BJ=\sqrt{2}$

تمرين 10: ليكن ABC مثلثا بحيث : BC= 3 و AC= 2

و AB = $\sqrt{7}$ و ليكن I منتصف القطعة $[BC]$

(1أ) باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(B\hat{A}C)$

ب) أثبت أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

ج) أحسب AI

(2 نعتبر النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

أ) أحسب $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$

ب) بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الجواب:1)أ) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $9=4+7-4\sqrt{7}\cos(\hat{A})$

يعني: $-2=-4\sqrt{7}\cos(\hat{A})$ يعني

$$\cos(\hat{A})=\frac{2}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

1)ب) لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{(\sqrt{7})^2}{14}=\frac{14}{14}=1$

1)ج) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني: $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ يعني: $\frac{13}{2}=2AI^2$ يعني: $AI^2=\frac{13}{4}$ يعني: $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

(2أ) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

(2ب) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

ومنه : $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{AC}$ وبالتالي : $(MB)\perp(AC)$

تمرين 11 : ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $BC=AC=\sqrt{2}$
و D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI
2. عبر عن $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
3. بين أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$
4. استنتج أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ و استنتج $\cos\widehat{BAC}$
5. أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD
6. نعتبر النقطة M حيث : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

أ. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

ب. بين أن $(MD)\perp(AC)$

الجواب:1) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$: يعني $\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}1^2$

يعني : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ يعني : $\frac{7}{2}=2CI^2$ يعني : $\frac{7}{4}=CI^2$

يعني : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

ومنه $(IC)\perp(AB)$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

وبالتالي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos 0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

<u>حساب</u> $\cos\widehat{BAC}$ وجدنا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ يعني $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

يعني $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) وجدنا $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ اذن :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

ومنه BAD **قائم الزاوية في** A

6) أ) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

حساب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2AC^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6) ب) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$ أي $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

ومنه $(MD)\perp(AC)$

تمرين 12 : ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه B بحيث: $AB=\sqrt{2}$
ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)

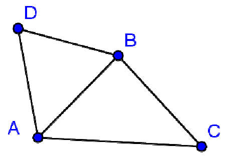
1) أحسب: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2) أحسب : AC و DC

3) بين أن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) تحقق من أن $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$

5) استنتج أن $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$



الجواب:1)

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BC}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

2) حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان: $AC^2=BC^2+AB^2$

يعني $AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ يعني $AC^2=4$ يعني $AC=2$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

يعني $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$

يعني $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

(4 $\widehat{DAC}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

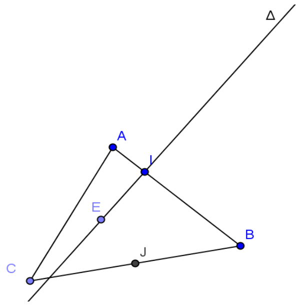
5)وجدنا : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

يعني: $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

يعني: $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$ يعني:

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تمرين 13: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ و
$\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$
و I نقطة بحيث $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ و
J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن
(Δ) المستقيم المار من I
والعمودي على المستقيم (AB)
ولتكن نقطة E بحيث: $E\in(\Delta)$



1) أرسم شكلا تقريبيا
2) بين أن: $AB=8$ وأحسب BC
3) أحسب: $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$
4) بين أن: $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$
5) أحسب: AJ

الجواب:1)

2)أ) لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ يعني $AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$
يعني $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ يعني $AB^2\times\frac{1}{4}=16$
يعني $AB^2=64$ يعني $AB=8$

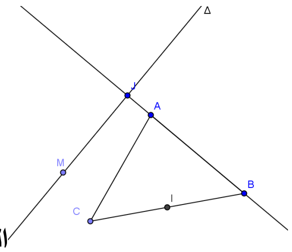
ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC
لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$
بالتعويض نجد: $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$
يعني: $BC^2=96$ يعني $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$
لدينا $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن: $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$
ومنه: $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC
$AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$
يعني: $128=2AJ^2+48$ يعني: $80=2AJ^2$ يعني: $40=AJ^2$
يعني: $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

تمرين 13 BIS: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B
بحيث: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ و $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$
و J نقطة بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$. وليكن
(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)
ولتكن نقطة بحيث: $M\in(\Delta)$
1. أرسم شكلا تقريبيا
2. بين أن: $AB=6$ وأحسب AC
3. أحسب: $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$
4. بين أن: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$
5. أحسب: BI



الجواب:1)

2)أ) لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ يعني $\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos\hat{B}=12$
يعني $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ يعني $AB^2\times\frac{1}{3}=12$
يعني $AB^2=36$ يعني $AB=6$

ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC
لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\hat{B}$
بالتعويض نجد: $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$
يعني: $AC^2=54$ يعني $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$
لدينا $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن: $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$
ومنه: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC
$AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني: $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$
يعني: $72=2BI^2+27$ يعني: $45=2BI^2$ يعني: $BI^2=\frac{45}{2}$ يعني: $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

تمرين للبحث: يكن ABC مثلثا بحيث: $AC=3$ و $AB=1$ و
$\widehat{CAB}=\frac{2\pi}{3}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.
1) بين أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$
2) لتكن E النقطة بحيث: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$
أ) بين أن $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ ثم أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$
ب) بين أن $(AB)\perp(IE)$

انتهى الدرس

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien

حول الدرس