Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

تمارين محلولة:الجداء السلمي

المستوى : الجذع مشترك علمي
و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

أكاديمية الجهة الشرقية

تمرين1: ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

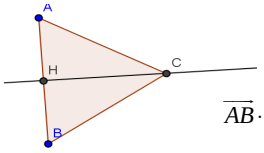
حيث: $\|\vec{u}\|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\|=4$ أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$

الجواب: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

تمرين2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فان كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\frac{\pi}{3}$ ومنه:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times6\times\frac{1}{2}=18$

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}=\|\overrightarrow{CH}\|\times\|\overrightarrow{HB}\|\times\cos\hat{H}=CH\times HB\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=CH\times HB\times0=0$

تمرين3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF=5$ و $EG=3$

و $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=-6$ أحسب $\cos\left(\widehat{FEG}\right)$

الجواب: $\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{EG}=\|\overrightarrow{EF}\|\times\|\overrightarrow{EG}\|\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $EF\times EG\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$ يعني $5\times3\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-6$

يعني $\cos\left(\widehat{FEG}\right)=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$

تمرين4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3$ و $AC=4$

و $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الجواب: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=12\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

لأن : $\cos(\pi-x)=-\cos x$ اذن :

تمرين5: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\|=5$ و $\|\vec{v}\|=3$

و $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{3}{2}$ أحسب $\vec{u}^2$ و $\vec{v}^2$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})^2$ و

$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$ و $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})$ و $(5\vec{u}-\vec{v})\cdot(5\vec{u}+\vec{v})$

الجواب: $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=5^2=25$ و $\vec{v}^2=\|\vec{v}\|^2=3^2=9$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=5^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)+3^2=25-3+9=31$

$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=5^2-2\left(-\frac{3}{2}\right)+3^2=25+3+9=37$

$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=5^2-3^2=25-9=16$

$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})=3\vec{u}\cdot\vec{u}+3\vec{u}\cdot5\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{u}-2\vec{v}\cdot5\vec{v}$

$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})=3\vec{u}^2+15\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-10\vec{v}^2=3\times25+13\vec{u}\cdot\vec{v}-10\times9$

$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})=75+13\left(-\frac{3}{2}\right)-90=-15-\frac{39}{2}=-\frac{69}{2}$

$(5\vec{u}-\vec{v})\cdot(5\vec{u}+\vec{v})=(5\vec{u})^2-(\vec{v})^2=25(\vec{u})^2-(\vec{v})^2=25\times25-9=616$

تمرين6: ليكن ABC مثلثا قائما في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

بين أن: 1) $AB^2+AC^2=BC^2$ 2) $AC\times AB=AH\times BC$

3) $CA^2=CH\times BC$

الأجوبة: 1) $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$ لأن ABC قائما في A اذن: $BC^2=BA^2+AC^2$

2) باعتبار المثلث : (ABC) : $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$

و باعتبار المثلث : (ABH) : $\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}$

ومنه $\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}$ ومنه : $AC\times AB=AH\times BC$

3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

باعتبار المثلث : (ABC) : $\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}$

و باعتبار المثلث : (ABH) : $\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}$

ومنه $\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AB}$ ومنه $AC^2=CH\times BC$

تمرين7: ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).أحسب : AC و BH و AH و HC

علما أن : $AB=2cm$ و $BC=5cm$

الجواب: حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان : $BC^2=AB^2+AC^2$

يعني : $AC^2=BC^2-AB^2$ يعني: $AC^2=5^2-2^2=21$

يعني : $AC=\sqrt{21}cm$

وحسب العلاقات المترية لدينا: $AB^2=BH\times BC$

يعني : $BH=\frac{AB^2}{BC}=\frac{4}{5}cm$

ولدينا: $AC^2=CH\times CB$ يعني : $CH=\frac{AC^2}{BC}=\frac{21}{5}cm$

تمرين8: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$ و $AC=8$

و $AB=5$.

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

1) أحسب BC 2) $\cos\widehat{ACB}$

الجواب:1) حساب BC

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$

يعني: $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 8\times 5\cos\widehat{BAC}$

يعني: $BC^2 = 89 - 80\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ يعني: $BC^2 = 89 - 80\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)$

يعني: $BC^2 = 89 - 80\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني: $BC^2 = 89 - 80\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

يعني: $BC^2 = 89 - 80\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ لأن: $\cos(\pi - x) = -\cos x$

يعني: $BC^2 = 89 + 80\left(\frac{1}{2}\right)$ يعني: $BC^2 = 89 + 40$ يعني: $BC^2 = 129$

يعني: $BC = \sqrt{129}$

2) حساب $\cos\widehat{ACB}$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\times BC\cos\widehat{ACB}$

يعني: $5^2 = 8^2 + \left(\sqrt{129}\right)^2 - 2\times 8\times\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني: $25 = 64 + 129 - 16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني: $25 - 193 = -16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني: $-168 = -16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

$\cos\widehat{ACB} = \frac{-168}{-16\sqrt{129}} = \frac{168\sqrt{129}}{2064} = \frac{21\sqrt{129}}{258} = \frac{7\sqrt{129}}{86}$:

تمرين9: ليكن ABC مثلثا بحيث: $BC = 4cm$ و $AC = 6cm$ و $AB = 3cm$ ولتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI.

الجواب: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ يعني: $3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}4^2$

يعني: $37 = 2AI^2$ يعني: $45 - 8 = 2AI^2$ يعني: $9 + 36 = 2AI^2 + \frac{16}{2}$

يعني: $AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$ يعني: $AI^2 = \frac{37}{2}$

تمرين10: ليكن ABM مثلثا بحيث: $AB = 4cm$ و $AM = 3cm$ و $BM = 4cm$

و لتكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$

أحسب المسافات MI و AK و BJ

الجواب: حساب MI: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ يعني: $3^2 + 4^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}4^2$

يعني: $17 = 2MI^2$ يعني: $25 - 8 = 2MI^2$ يعني: $9 + 16 = 2MI^2 + \frac{16}{2}$

يعني: $MI = \sqrt{\frac{17}{2}}$ يعني: $MI^2 = \frac{17}{2}$

حساب AK: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2 + AM^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BM^2$ يعني: $2^2 + 3^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}4^2$

يعني: $17 = 2AK^2$ يعني: $25 - 8 = 2AK^2$

يعني: $AK = \sqrt{\frac{17}{2}}$ يعني: $AK^2 = \frac{17}{2}$

حساب BJ: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2 + BM^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AM^2$ يعني: $4^2 + 4^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}3^2$

يعني: $32 - \frac{9}{2} = 2BJ^2$ يعني: $\frac{55}{2} = 2BJ^2$

يعني: $BJ = \sqrt{\frac{55}{4}}$ يعني: $BJ^2 = \frac{55}{4}$ يعني: $BJ = \frac{\sqrt{55}}{2}$

تمرين11: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و $CB = 2$ ولتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

1) بين أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ واستنتج $\cos\hat{A}$

2) اكتب: $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) أحسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

4) أحسب AD

5) ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

أحسب AI و BJ

الجواب:1) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos\hat{A}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\hat{A} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$

اذن: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

بالتعويض نجد: $2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني: $4 = 1 + 2 - 2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ يعني: $1 = -2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$

استنتاج $\cos\hat{A}$: لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

يعني: $-\frac{1}{2} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني: $-\frac{1}{2} = 1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$ يعني:

$\cos\hat{A} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{DA}$ يعني: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$

يعني: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

ومنه: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ أي: ABD قائم الزاوية في A

4) لدينا: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$ اذن: $\overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$

اذن: $AD^2 = \frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(2\overrightarrow{AC}\right)^2 + 4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{9}\left(AB^2 + 4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 4AC^2\right)$

$AD^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$ اذن: $AD = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

5) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ يعني: $1^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2$

يعني: $1 = 2AI^2$ يعني: $3 - 2 = 2AI^2$ يعني: $3 = 2AI^2 + 2$

يعني: $AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$ يعني: $AI^2 = \frac{1}{2}$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني: $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$

يعني: $1+4=2BJ^2$ يعني: $5-1=2BJ^2$ يعني: $4=2BJ^2$

يعني: $BJ^2=2$ يعني: $BJ=\sqrt{2}$

تمرين12: ليكن ABC مثلثا بحيث : BC= 3 و AC= 2 و AB = $\sqrt{7}$ و ليكن I منتصف القطعة $[BC]$

1)أ)باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(B\hat{A}C)$

ب)أثبت أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

ج)أحسب AI

2)نعتبر النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

أ) أحسب $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$

ب)بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الجواب:1)أ)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $9=4+7-4\sqrt{7}\cos(\hat{A})$

يعني: $-2=-4\sqrt{7}\cos(\hat{A})$ يعني

$\cos(\hat{A})=\frac{2}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$

1)ب)لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{(\sqrt{7})^2}{14}=\frac{14}{14}=1$

1)ج)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني: $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ يعني: $\frac{13}{2}=2AI^2$ يعني: $AI^2=\frac{13}{4}$ يعني: $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

2)أ) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

2)ب) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي : $(MB)\perp(AC)$

تمرين13: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $BC=AC=\sqrt{2}$

و D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI

2. عبر عن $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3. بين أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4. استنتج أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ و استنتج $\cos\widehat{BAC}$

5. أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD

6. نعتبر النقطة M حيث : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

أ. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

ب.بين أن $(MD)\perp(AC)$

الجواب:1)حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$ يعني: $\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}1^2$

يعني: $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ يعني: $\frac{7}{2}=2CI^2$ يعني: $\frac{7}{4}=CI^2$

يعني: $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني: $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

ومنه $(IC)\perp(AB)$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

وبالتالي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos0=AB\cdot AI\cdot1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

حساب $\cos\widehat{BAC}$ وجدنا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ يعني $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

يعني $\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ يعني $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5)وجدنا $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ اذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

يعني $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

أي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

ومنه BAD **قائم الزاوية في** A

6)أ) $-3\overrightarrow{MA}+7(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$ يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

حساب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2AC^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6)ب) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

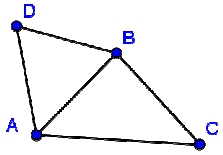
يعني $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}=$

أي $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$ $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

ومنه $(MD)\perp(AC)$

تمرين14: ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه B بحيث: $AB=\sqrt{2}$

ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)



1)أحسب: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2)أحسب : AC و DC

3)بين أن $\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}\right.$

4)تحقق من أن $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$

5)استنتج أن $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

الجواب:1)

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

2)حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان: $AC^2=BC^2+AB^2$

يعني $AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ يعني $AC^2=4$ يعني $AC=2$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

يعني $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$

يعني $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $\widehat{DAC}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

5)وجدنا : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

يعني: $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

يعني: $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$ يعني:

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تمرين15:ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

و I نقطة بحيث $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ و J منتصف القطعة $[BC]$.وليكن

(Δ)المستقيم المار من I والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة Eبحيث : $E\in(\Delta)$

1)أرسم شكلا تقريبيا

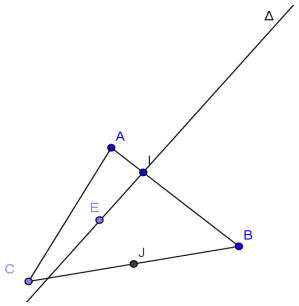
2)بين أن : $AB=8$ وأحسب BC

3)أحسب: $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4)بين أن : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5)أحسب: AJ

الجواب:1)



2)أ)لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ يعني

$AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

يعني

يعني $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$

$AB^2\times\frac{1}{4}=16$

يعني $AB^2=64$

$AB=8$

ب)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

يعني : $BC^2=96$ يعني $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن : $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

يعني : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

يعني : $128=2AJ^2+48$ يعني : $40=AJ^2$ يعني : $80=2AJ^2$

يعني : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

تمرين16:ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

بحيث: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ و $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$

و J نقطة بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$.وليكن

(Δ)المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث : $M\in(\Delta)$

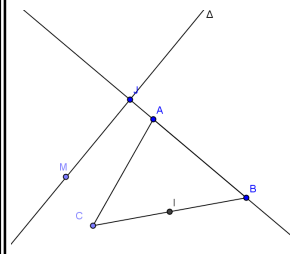
1.أرسم شكلا تقريبيا

2.بين أن : $AB=6$ وأحسب AC

3.أحسب: $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$

4.بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$

5. أحسب: BI



الجواب:1)

2)أ)لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ يعني

$\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\hat{B}=12$

يعني $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ يعني $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

يعني $AB^2=36$ يعني $AB=6$

ب)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\hat{B}$

بالتعويض نجد: $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$

يعني : $AC^2=54$ يعني $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن : $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

يعني : $AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

يعني : $72=2BI^2+27$ يعني : $45=2BI^2$ يعني : $BI^2=\frac{45}{2}$

يعني : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$