عثماني نجيب

الجذع مشترك علمي

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

1. ترتيب ومقارنة :

a) بصفة عامة :

مقارنة عددين تعني البحث عن أكبرهما

لمقارنة عددين نعتمد على الفرق ، حيث لدينا $(b \geq a) \Leftrightarrow (b - a \geq 0) \Leftrightarrow (a \leq b)$

مثال: a و b عددان غير منعدمان مختلفي الإشارة $(a+b)^2$ و $a^2 + b^2$

لدينا $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ وبالتالي $(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ ® 0 نستنتج أن $(a^2 + b^2)$ ® $(a+b)^2$:

b) مقارنة الكسور الموجبة: نذكر بالقواعد التالية الخاصة بكسرين بسطيهما ومقاميهما موجبان:

- إذا كان لكسرين نفس المقام، فإن أكبرهما هو الذي له أكبر بسط : $\frac{2}{17} \leq \frac{13}{17}$
- إذا كان لكسرين نفس البسط، فإن أكبرهما هو الذي له أصغر مقام : $\frac{17}{13} \leq \frac{17}{2}$
- بصفة عامة لمقارنة كسرين أو أكثر، نوحد مقامات الكسور ثم نستعمل القاعدة الأولى:

لمقارنة الكسور $\frac{2}{3}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{5}{6}$ نوحد المقامات أولا ، لدينا : $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$; $\frac{13}{18} = \frac{13}{18}$; $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ حسب **القاعدة** الأولى لدينا $\frac{15}{18}$ ® $\frac{13}{18}$ ® $\frac{12}{18}$ نستنتج بالتالي أن : $\frac{5}{6}$ ® $\frac{13}{18}$ ® $\frac{2}{3}$

c) مقارنة الكسور مع العدد 1: نذكر بالقواعد التالية:

- إذا كان البسط يساوي المقام فإن الكسر يساوي 1 : $\frac{17}{17} = 1$
- و إذا كان البسط أكبر من المقام فإن الكسر أكبر من 1 : $1 \leq \frac{23}{17}$
- و إذا كان البسط أصغر من المقام فإن الكسر أصغر من 1. $\frac{15}{17} \leq 1$

d) مقارنة أعداد يحتوي بعضها على جدور الموجبة:

- في الحالات البسيطة غالبا ما نلتجئ إلى مقارنة المربعات وفق إحدى القاعدتين :

$(0 \leq x \leq y) \Leftrightarrow (0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y})$ **أو** $(0 \leq x^2 \leq y^2) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq y)$

لمقارنة الأعداد 9 ; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$ نحسب المربعات : $9^2 = 81$; $(7\sqrt{2})^2 = 98$; $(5\sqrt{3})^2 = 75$

لدينا 98 ® 81 ® 75 ، نستنتج بالتالي أن : $5\sqrt{3} \leq 9 \leq 7\sqrt{2}$

- لكن اللجوء الى المربعات من البداية لا يمكن من المقارنة بل ربما يزيد الأمور تعقيدا . في هذه الحالة يمكن الاستعانة بالفرق في البداية ثم مقارنة المربعات بعد التأكد من أن الأعداد التي نريد مقارنتها موجبة:

لمقارنة العددين $a = 7\sqrt{3} + 11$; $b = 5\sqrt{3} - 7$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

لدينا العدد a ® 0 لأنه مجموع عددين موجبين. أما العدد b فهو على شكل فرق عددين ، لدينا :

$7^2 = 49$; $(5\sqrt{3})^2 = 75$ ، بما أن 75 ¤ 49 فإن $5\sqrt{3}$ ¤ 7 وبالتالي $b = 5\sqrt{3} - 7$ ¤ 0

نستنتج في النهاية أن : a ® 0 و b ® 0

حساب المربعات سوف لن يؤدي إلا الى تعقيد الحساب دون التوصل الى مقارنة العددين ولكم أن تجربوا ذلك بأنفسكم.

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a - b = 7\sqrt{3} + 11 - 5\sqrt{3} + 7 = 2\sqrt{3} + 18$ ¤ 0 . ومنه a ¤ b .

لمقارنة العددين $a = 7\sqrt{3} - 11$; $b = 5\sqrt{3} - 7$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

نتأكد بنفس الطريقة السابقة أن : a ® 0 و b ® 0

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a - b = 7\sqrt{3} - 11 - 5\sqrt{3} + 7 = 2\sqrt{3} - 4$.

لدينا :

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

بما أن $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 \; ; \; 4^2 = 16$ ، فإن $12 ® 16$ فإن $2\sqrt{3} ® 4$ وبالتالي $2\sqrt{3} - 4 ® 0$

ومنه نستنتج أن $a ® b$

2. الترتيب والعمليات : نعرض في الجدول التالي أهم القواعد المستعملة في المقارنة

Opération	Domaine / Propriété	العملية
Somme	$\forall a,b,c,d \in IR \; ; \; \begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow a + c \le b + d$;	الجمع
Produit par des positifs	$\forall a \ge 0; \forall b \ge 0; \forall c \ge 0; \forall c \ge 0 \; ; \; a \le b \Rightarrow a \times c \le b \times d$	الضرب في الأعداد الموجبة
Produit par un seul réel	$\forall a;b \in IR; \forall c \ge 0 \; ; \; a \le b \Rightarrow a \times c \le b \times d$ $\forall a;b \in IR; \forall c \le 0 \; ; \; a \le b \Rightarrow a \times c \ge b \times d$	الضرب في عدد واحد
Opposé	$\forall a;b \in IR \; ; \; a \le b \Rightarrow -a \ge -b$	المقابل
Inverse des positifs	$\forall a ¤ 0 \; ; \; \forall b ¤ 0 \; ; \; 0 ® a \le b \Rightarrow 0 ® \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$	مقلوب الأعداد الموجبة

قواعد الجذور المربعة

$$\sqrt{a}^{\,2} = a \quad (\text{pour } a ¤ 0) \quad ; \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (\text{pour } a ¤ 0, b ¤ 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\text{pour } a ¤ 0, b ¤ 0)$$

Attention!!....

$$\sqrt{a+b} \ne \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{a-b} \ne \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

قواعد القوى

$$a^0 = 1 \quad (\text{pour } a \ne 0) \quad ; \quad a^0 = a \quad ; \quad a^2 = a \times a$$

$$a^n = a \times a \times .....\times a = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad ; \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Attention!!....ne pas confondre avec les identités

$$a^n + b^n \ne (a+b)^n \quad ; \quad a^n - b^n \ne (a-b)^n$$

Opération	Domaine / Propriété	العملية
Puissances et racines	$\forall a \ge 0; \forall b \ge 0; \forall n \in IN^* \; ; \; 0 \le a \le b \Leftrightarrow 0 \le a^n \le b^n$ $\forall a \ge 0; \forall b \ge 0; \forall n \in IN^* \; ; \; 0 \le a \le b \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{a} \le \sqrt{b}$	القوى والجذور

قواعد القيم المطلقة

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad ; \quad |x \times y| = |x| \times |y| \quad ; \quad \begin{cases} |x| = \;\; x \Leftrightarrow x \ge 0 \\ |x| = -x \Leftrightarrow x \le 0 \end{cases} \quad ; \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\big||x| + |y|\big| \le |x+y| \le |x| + |y| \quad ; \quad \begin{cases} |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in \left]-r, r\right[\\ |x| > r \quad x \Leftrightarrow (x ® -r \text{ ou } x ¤ r) \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -r\right[\cup \left]r, +\infty\right[\end{cases}$$

قيمة مقربة :

نقول أن العدد َ هو قيمة مقربة للعدد x إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$|x - A| ® r$ أي $A - r ® x ® A + r$ أي $x \in \left]A - r, A + r\right[$