مستوى الجذع مشترك علمي

الأستاذ : نجيب عثماني

ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

الحساب في IR .

1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من IR .

a) $a=b$ يكـــافئ $a+c=b+c$

b) $a=b$ يكـــافئ $a.c=b.c$ $(c\neq 0)$

c) إذا كان $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ و فـــإن $\begin{cases} a+c=b+d \\ a.c=b.d \end{cases}$ و

d) $a.b=0$ يكـــافئ $a=0$ أو $b=0$.

e) $a.b\neq 0$ يكـــافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

g) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكـــافئ $a.d=b.c$ $(a\neq 0$ و $b\neq 0)$

h) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ و $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

i) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ و $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$ و $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

2) القوى في IR

a) تعريف

*) $a^0=1$ $(a\neq 0)$ *) $a^1=1$

*) $a^n=\underbrace{a.a.a.....a}_{n\,fois}$ $(n\in IN^*-\{1\})$

*) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

b) خاصيـــات

a) ليكن a و b من IR^* و m و n من $\mathbb{Z}$.

*) $a^m.a^n=a^{m+n}$ *) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

*) $(a^m)^n=a^{mn}$ *) $(ab)^n=a^nb^n$

*) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ *) $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$

b) إذا كان $a=b$ فإن $a^2=b^2$

c) $\boxed{\text{إذا كان } a^2=b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة فإن } a=b \text{ .}}$

d) $a^2=b^2$ يكـــافئ $a=b$ أو $a=-b$.

ملاحظـــة $\boxed{\text{لكي نبين أن : } a=b \text{ يكفي مثلا أن نبين أن } a^2=b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة}}$

3) متطابقـــات هامة

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

c) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

e) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

f) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

g) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

4) الجذور المربعة .

تعريف ليكن $a\in IR^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق : $b^2=a$. ونكتب $\sqrt{a}=b$.

خاصيـــات .

a) ليكن a و b من IR^+ .

*) $\sqrt{a}\geq 0$ *) $\boxed{\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a}$

*) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ *) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

*) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) ليكن $x\in IR$. $\boxed{\sqrt{x^2}=|x| \text{ .}}$

c) إذا كان $ab>0$ فإن : $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

d) ليكن $a\in IR^+$ $\boxed{x^2=a \text{ يكـــافئ } x=\sqrt{a} \text{ أو } x=-\sqrt{a} \text{ .}}$

5) التنـــــــاسبية .

a) نقول إن العددين a و b متناسبان مع c و d إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

b) إذا كان : $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ فإن :

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}$$

6) الجزئ الصحيح .

a) تعريف : كل عدد حقيقي x محصور بين عددين نسبيين متتابعين k و $k+1$ يعني : $k\leq x<k+1$

العدد النسبي k يسمى الجزئ الصحيح للعدد x ونكتب $E(x)=k$ أو

$[x]=k$

ملاحظة :

*) الجزئ الصحيح للعدد x هو العدد النسبي الذي يوجد مباشرة قبل x .

*) $E(x)\leq x<E(x)+1$ لكل x من IR .

II) الترتــــيـــــب في IR .

1) خاصيـــات

a) *) $a\geq b$ يكـــافئ $a-b\geq 0$

*) $a\leq b$ يكـــافئ $a-b\leq 0$

b) *) $a>b$ يكـــافئ $a-b>0$

*) $a<b$ يكـــافئ $a-b<0$

c) *) $a\leq b$ يعني $a<b$ أو $a=b$.

*) إذا كان $a<b$ فإن $a\leq b$ والعكس غير صحيح .

d) *) $a\geq b$ يكـــافئ $a+c\geq b+c$

*) $a>b$ يكـــافئ $a+c>b+c$

e) *) إذا كان $\begin{cases} a\leq b \\ b\leq c \end{cases}$ و فإن $a\leq c$.

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ b < c \end{cases}$ و فإن $a < c$.

f) *) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ و فإن $a + c \le b + d$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c < d \end{cases}$ و فإن $a + c < b + d$

g) *) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \ge 0 \end{cases}$ و فإن $ac \le bc$

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le 0 \end{cases}$ و فإن $ac \ge bc$.

f) *) إذا كان $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 \le c \le d \end{cases}$ و فإن $ac \le bd$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 < c < d \end{cases}$ و فإن $ac < bd$

i) ليكن $a > 0$ و $b > 0$. *) $a \le b$ يكـــافئ $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

j) ليكن $a < 0$ و $b < 0$. *) $a \le b$ يكـــافئ $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

k) ليكن $a \ge 0$ و $b \ge 0$ *) $a \le b$ يكـــافئ $a^2 \le b^2$

*) $a \le b$ يكـــافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

l) ليكن $a \le 0$ و $b \le 0$ *) $a \le b$ يكـــافئ $a^2 \ge b^2$

m) ليكن a و b من IR $|a| \le |b|$ يكـــافئ $a^2 \le b^2$

n) إذا كان لـ a و b نفس الإشارة و $a + b = 0$ فإن $a = 0$ و $b = 0$

ملاحظة

إذا كان العددين a و b يحتويان على الجذور المربعة ، لكي نقارن a و b يكفي مثلا أن نقارن a^2 و b^2 ونتحقق من إشارة a و b ثم نستعمل الخاصيتين k) و l) .

2) القيـــــــمة المطلقة .

تعريف :ليكن x من IR . القيمة المطلقة للعدد x هي العدد الذي نرمز له ب $|x|$ والمعرف بما يلي : $|x| = \begin{cases} x & ; \; x \ge 0 \\ -x & ; \; x \le 0 \end{cases}$

يعني : *) إذا كان $x \ge 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي نفسه .

*) إذا كان $x \le 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي مقابله .

خاصيـــــــات

a) *) $|-x| = |x|$ *) $|x| \ge 0$

*) $|xy| = |x||y|$ *) $|x^n| = |x|^n$ *) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

b) *) $|x| = r$ يكـــافئ $x = r$ أو $x = -r$.

*) $|x| = |y|$ يكـــافئ $x = y$ أو $x = -y$.

c) *) $|x| \le r$ يكـــافئ $-r \le x \le r$

*) $|x| \ge r$ يكـــافئ $x \ge r$ أو $x \le -r$

3) المجـــــالات

a) $[a,b] = \{x \in IR \,/\, a \le x \le b\}$

a) $[a,b[= \{x \in IR \,/\, a \le x < b\}$

a) $]a,b] = \{x \in IR \,/\, a < x \le b\}$

a) $]a,b[= \{x \in IR \,/\, a < x < b\}$

a) $[a,+\infty[= \{x \in IR \,/\, x \ge a\}$

a) $]a,+\infty[= \{x \in IR \,/\, x > a\}$

a) $]-\infty,a] = \{x \in IR \,/\, x \le a\}$

a) $]-\infty,a[= \{x \in IR \,/\, x < a\}$

4) التأطيـــــــــر

تعريف : كل متفاوتة من المتفاوتات $a < x < b$ و $a \le x < b$ و $a < x \le b$ و $a \le x \le b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b - a$.

5) القيمة المقربـــــــة .

a) i) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{0 \le x - x_0 \le r}$

ii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{-r \le x - x_0 \le 0}$.

iii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{-r \le x - x_0 \le r}$

يعني $\boxed{|x - x_0| \le r}$.

b) إذا أردنا أن نحدد قيمة مقربة للعدد x نقوم بتأطير العدد x و سنجد $\boxed{a \le x \le b}$: ومن هنا نستنتج أن ما يلي :

i) a هي القيمة المقربة بتفريط للعدد x بالدقة $r = b - a$

ii) b هي القيمة المقربة بإفراط للعدد x بالدقة $r = b - a$

iii) $\dfrac{a+b}{2}$ هي القيمة المقربة للعدد x بالدقة $r = \dfrac{b-a}{2}$

c) ملاحظـــة

يمكن تحديد قيمة مقربة للعدد x مباشرة إذا كانت لدينا إحدى التأطيرات التالية :

i) $\boxed{0 \le x - x_0 \le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r

ii) $\boxed{-r \le x - x_0 \le 0}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r

iii) $\boxed{-r \le x - x_0 \le r}$ أو $\boxed{|x - x_0| \le r}$

وستكون x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

d) التقريب العشري .

ليكن x من IR .

i) العدد العشري $\dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ يسمى القيمة العشرية المقربة بتفريط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

i) العدد العشري $\dfrac{E(10^n x)}{10^n} + 1$ يسمى القيمة العشرية المقربة بإفراط للعدد x بالدقة 10^{-n} .