# ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

## ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

### I. تعاريف : ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين.

1)نقول إن $a$ أصغر من أو يساوي $b$ونكتب $a \leq b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^{+}$

2)نقول إن $a$ أكبر من أو يساوي $b$ و نكتب $a \geq b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^{+}$

3)نقول إن $a$ أصغر قطعا من $b$ و نكتب $a \prec b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

4)نقول إن $a$ أكبر قطعا من $b$ و نكتب $a \succ b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

اذن: لمقارنة عددين حقيقيين نحسب الفرق وندرس اشارته

**مثال :** $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و $a^2+1$

**الجواب:** $\left(a^2+1\right)-2a = a^2-2a+1 = (a-1)^2 \geq 0$

ومنه $a^2+1 \geq 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

### II. خاصيات : لتكن $a$ و $b$، $c$ و $d$ أعدادا حقيقية.

**خاصية 1:** إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

**ملحوظة:** إذا كان $a \leq b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة $a$ و $c$ يكفي مقارنة و مع نفس العدد $b$.

**خاصية الترتيب و الجمع:**

$a \leq b$ يكافئ $a+c \leq b+c$

- إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فان $a+c \leq b+d$
- إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فان $a+b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

**خاصية الترتيب و الضرب:**

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$
- إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فان $0 \leq ac \leq bd$
- إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a+b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

**خاصية الترتيب و المقلوب:** $a$ و $b$ عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$ $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

إذا كان $a \leq b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$ .

**خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان.

$a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$ و $a \leq b$ يكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

ولكل $a$ من $\mathbb{R}$ : $a^2 \geq 0$

**ملحوظة:** جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\leq$ بأحد الرموز: $\geq$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

### III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

**1)** إذا كان $x \geq 0$ فان: $|x| = x$ و إذا كان $x \leq 0$ فان: $|x| = -x$

**مثال:** $|3| = 3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

**2)خاصيات:**

- لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \geq 0$ و $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$ و $-|x| \leq x \leq |x|$
- لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |-x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$
- لكل $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$ و $|x+y| \leq |x|+|y|$
- إذا كان $y \neq 0$ فان: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ .
- لكل $a$ من $\mathbb{R}^{*}$ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$ .
- لكل $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$ .

### IV. المجالات : ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$ .

ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات :

**مصطلحات:** الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

| المجال | المتفاوتة |
|---|---|
| $[a,b]$ | $a \leq x \leq b$ |
| $]a,b]$ | $a \prec x \leq b$ |
| $[a,b[$ | $a \leq x \prec b$ |
| $]a,b[$ | $a \prec x \prec b$ |

| المجال | المتفاوتة |
|---|---|
| $]b,+\infty[$ | $x \succ b$ |
| $[b,+\infty[$ | $x \geq b$ |
| $]-\infty,a]$ | $x \leq a$ |
| $]-\infty,a[$ | $x \prec a$ |

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق $a$ , $b$ " أو " القطعة $a$ , $b$ "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح $a$ , $b$ "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال $a$ , زائد اللانهاية, مفتوح من $a$ "

**ملحوظة:** $\mathbb{R}^{+} = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^{-} = ]-\infty,0]$

و $\mathbb{R}_{+}^{*} = ]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}_{-}^{*} = ]-\infty,0[$

### V. تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن $x$ عددا حقيقيا.

تأطير العدد $x$ يعني إيجاد عددين حقيقيين $a$ و $b$ مع $a \prec b$ بحيث: $a \leq x \leq b$ أو $a \leq x \prec b$ أو $a \prec x \leq b$ أو $a \prec x \prec b$ .

العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير

و العددان $a$ و $b$ هما محدات التأطير.

### VI. التقريبات والتقريبات العشرية:

**التقريبات:** ليكن $a$ و $x$ عنصرين من $\mathbb{R}$ و $r$ عددا حقيقيا موجبا قطعا.

- إذا كان $a \leq x \leq a+r$ نقول إن $a$ قيمة مقربة للعدد $x$ بالدقة $r$ بتفريط.
- إذا كان $a-r \leq x \leq a$ نقول إن $a$ قيمة مقربة للعدد $x$ بالدقة $r$ بإفراط.
- إذا كان $|x-a| \leq r$ نقول إن $a$ قيمة مقربة(أو بالتقريب) للعدد $x$ بالدقة $r$ .

- **خاصية:** إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد $x$ فان:
  - العدد $a$ قيمة مقربة للعدد $x$ بالدقة $b-a$ بتفريط. و العدد $b$ قيمة مقربة للعدد $x$ بالدقة $b-a$ بإفراط .
  - العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد $x$ بالدقة $\frac{b-a}{2}$ .

**مثال:** من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

- العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة $10^{-3}$ بتفريط.
- العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة $10^{-3}$ بإفراط.
- العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة $5\times10^{-4}$ بتفريط.

- **التقريب العشري لعدد حقيقي والجزء الصحيح لعدد حقيقي:**

لكل عدد حقيقي $x$ يوجد عدد صحيح نسبي و حيد $p$ بحيث: $p \leq x \leq p+1$ و $p$ يسمى الجزء الصحيح للعدد $x$ و نكتب: $E(x) = p$

**مثال :** لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ و منه فان $E\left(\sqrt{2}\right) = 1$

الأستاذ : عثماني نجيب