الترتيب في IR

القدرات المنتظرة

*- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة.
*- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي.
*- إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية.
*- استعمال المحسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.

I- الترتيب و العمليات

1- أنشطة

تمرين1

ليكن a عددا حقيقيا قارن a^2+1 و $2a$

تمرين1

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $-2\le a\le 3 \quad ; \quad -1\le b\le 4$

بين أن $-41\le a^2-b^2+3a-5b+1\le 24$

تمرين2

قارن $1+3\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$

تمرين3

ليكن $x\in\mathbb{R}_+^*$

أ- بين أن $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

ب- قارن $\dfrac{1}{2x}$ و $\sqrt{x^2+1}-x$

تمرين4

ليكن a و b عددين حقيقيين سالبين قطعا حيث $a\ne b$

قارن $\dfrac{a}{b}-1$ و $1-\dfrac{b}{a}$

2- تعريف و خاصيات

أ تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين
$a\ge b$ يعني $a-b\ge 0$
$a\le b$ يعني $a-b\le 0$

ب- خاصيات و نتائج

ليكن a و b و c و d أعداد حقيقية

إذا كان $a\ge b$ و $b\ge c$ فان $a\ge c$
إذا كان $a\ge b$ فان $a+c\ge b+c$
إذا كان $a\ge b$ و $c\ge d$ فان $a+c\ge b+d$

إذا كان $a\ge b$ و $c\ge 0$ فان $ac\ge bc$
إذا كان $a\ge b$ و $c\le 0$ فان $ac\le bc$

إذا كان $a\ge b\ge 0$ فان $a^2\ge b^2$
إذا كان $0\ge a\ge b$ فان $a^2\le b^2$

$0\le a\le b$ تكافئ $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

إذا كان a و b عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة و كان $a\le b$ فان $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$

نبين نتيجة الأخيرة

a و b عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة ومنه $ab \succ 0$

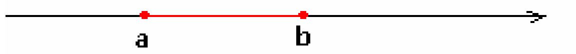
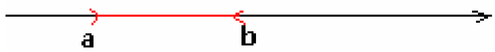
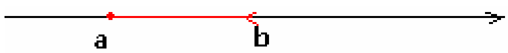
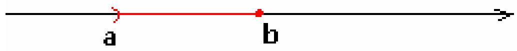
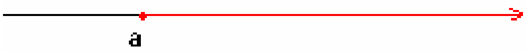
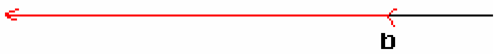
لدينا $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

و حيث أن $a \leq b$ فان $b-a \geq 0$ و بالتالي $\frac{b-a}{ab} \geq 0$ اذن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

II- المجالات

1- مجالات المجموعة IR

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ حيث $a \prec b$

مجموعة الاعداد الحقيقية X حيث:	ترميزها	قراءة و تمثيل على المستقيم
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	يقرأ المجال المغلق الذي طرفاه a و b 
$a \prec x \prec b$	$]a;b[$	يقرأ المجال المفتوح الذي طرفاه a و b 
$a \leq x \prec b$	$[a;b[$	يقرأ المجال المفتوح على اليمين الذي طرفاه a و b 
$a \prec x \leq b$	$]a;b]$	يقرأ المجال المفتوح على اليسار الذي طرفاه a و b 
$a \leq x$	$[a;+\infty[$	يقرأ المجال a زائد ما لانهاية مغلق في a 
$a \prec x$	$]a;+\infty[$	يقرأ المجال a زائد ما لانهاية مفتوح في a 
$x \leq b$	$]-\infty,b]$	يقرأ المجال ناقص لانهاية، b مغلق في b 
$x \prec b$	$]-\infty;b[$	يقرأ المجال ناقص لانهاية، b مفتوح في b 

أمثلة

* $[-1;4]=\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 4\}$

$-2 \notin [-1;4]$ $\qquad \frac{-1}{2} \in [-1;4]$ $\qquad \sqrt{3} \in [-1;4]$

* $]-\infty;2[=\{x \in \mathbb{R} / x \prec 2\}$

$2 \notin]-\infty;2[$ $\qquad \pi \notin]-\infty;2[$ $\qquad -\sqrt{2} \in]-\infty;2[$

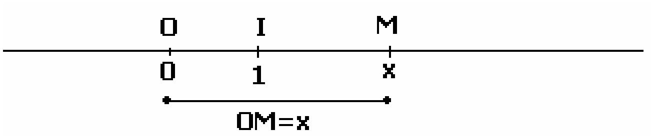
III- القيمة المطلقة

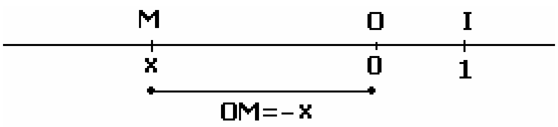
1- القيمة و المطلقة

تعريف

ليكن $\Delta(O;I)$ مستقيما مدرجا

القيمة المطلقة لكل عدد حقيقي x هي المسافة بين النقطة M التي أفصولها x و النقطة O. نرمز للقيمة المطلقة للعدد x بـ $|x|$ نكتب $OM=|x|$





ليكن $x\in\mathbb{R}$

إذا كان $x\geq 0$ فان $|x|=x$

إذا كان $x\leq 0$ فان $|x|=-x$

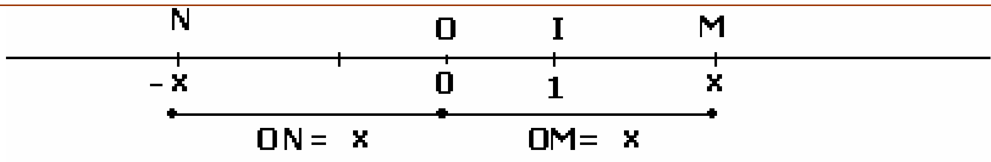
أمثلة

$$|2-\pi|=\pi-2 \quad ; \quad \left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1 \quad ; \quad |-12|=12 \quad ; \quad \left|\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$$

تمرين

حدد $\left|1-\sqrt{2}\right|$ و $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}$ و $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$

c) **خاصيات**



$OM=ON$ إذن $|x|=|-x|$

*- لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad |x|\geq 0$ ، $x\leq|x|$ ، $-x\leq|x|$ ، $|x|=|-x|$ ، $|x|^2=x^2$

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ و a من $\mathbb{R}^+$

✓ $|x|=0$ تكافئ $x=0$

✓ $|x|=a$ تكافئ $x=a$ أو $x=-a$

✓ $|x|=|y|$ تكافئ $x=y$ أو $x=-y$.

✓ $|xy|=|x||y| \quad ; \quad \left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|} \quad y\neq 0$

✓ $|x|\leq a$ تكافئ $-a\leq x\leq a$

✓ $|x+y|\leq|x|+|y|$

بين نتيجتين الأخيرتين

تمارين

تمرين 1

ليكن $x \in \mathbb{R}$

1- أكتب التعابير التالية بدون استعمال القيمة المطلقة

$|2x-1|$ ، $|3-x|$ ، $|x-2|+|x+3|$

2- بين بدون حذف رمز القيمة المطلقة أن $|x-5|+|x+1| \neq 4$ لكل x من $\mathbb{R}$

تمرين 2

ليكن $x \in \mathbb{R}$

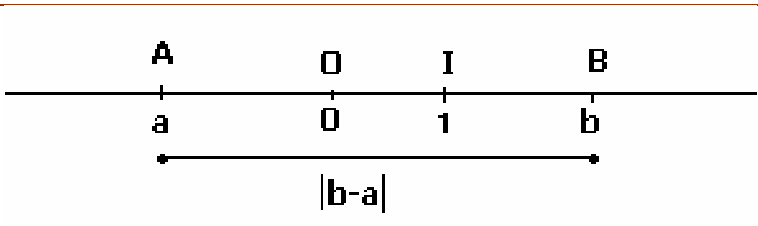
بين إذا كان $|x-1| \prec 10^{-3}$ فان $|x^2-1| \prec 10^{-2}$

2- المسافة بين نقطتين و القيمة المطلقة

خاصية

ليكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

$AB = |b-a|$



تعريف

المسافة $|b-a|$ لنقطتين $A(a)$ و $B(b)$ على مستقيم مدرج ، تسمى أيضا المسافة بين العددين a و b

أمثلة

* لنحدد الأعداد x التي مسافتها عن 3 هي 5
* حدد هندسيا على المستقيم المدرج $\Delta(O;I)$ النقطة $M(x)$ حيث $|x-2|=|x+5|$

3- مركز و سعة وشعاع مجال

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

على المستقيم المدرج $\Delta(O;I)$ نعتبر $A(a)$; $B(b)$

طول $[A;B]$ هو $|b-a|$

أفصول I منتصف $[A;B]$ هو $\frac{a+b}{2}$

$IA = IB = \frac{|b-a|}{2}$

تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مركز مجال طرفاه a و b هو $\frac{a+b}{2}$

سعة مجال طرفاه a و b هو $|b-a|$

شعاع مجال طرفاه a و b هو $\frac{|b-a|}{2}$

تمرين

1- حدد مركز وشعاع $]-3;5]$

2- حدد مجالا مفتوحا مركزه 2- وشعاعه 3

3- حدد مجالا مغلقا مركزه 1 و أحد طرفيه $\frac{-3}{2}$

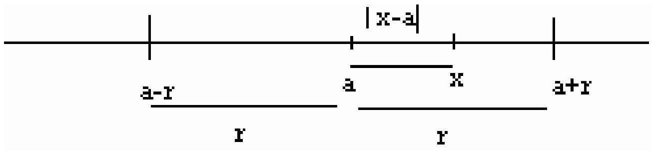
4- القيمة المطلقة والمجالات

مبرهنة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x-a| \leq r$ تكافئ $a-r \leq x \leq a+r$

$$[a-r;a+r] = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| \leq r\}$$



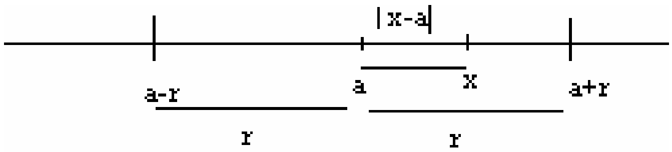
مجال مغلق مركزه a و شعاعه r

نتيجة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x-a| \prec r$ تكافئ $a-r \prec x \prec a+r$

$$]a-r;a+r[= \{x \in \mathbb{R} / |x-a| \prec r\}$$



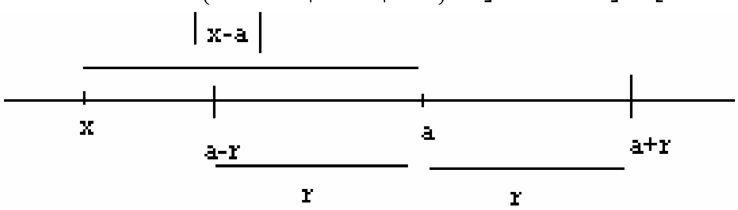
مجال مفتوح مركزه a و شعاعه r

نتيجة

ليكن x و a من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$|x-a| \geq r$ تكافئ $x \geq a+r$ أو $x \leq a-r$

$$\{x \in \mathbb{R} / |x-a| \geq r\} =]-\infty;a-r] \cup [a+r;+\infty[$$



تمرين

حدد المجموعات التالية

$A = \{x \in \mathbb{R} / |x-3| \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} / |x+4| \prec 7\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| \geq 2\}$

IV- التأطير و التقريب

A) التأطير

1- أنشطة

أ- حدد مجالا مفتوحا سعته 10^{-2} يحتوي على $\frac{2}{3}$

ب- علما أن $1,41 \prec \sqrt{2} \prec 1,42$

حدد مجالا مغلقا يحتوي على $-3\sqrt{2}$ سعته $7 \cdot 10^{-2}$

2- تعريف

ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ حيث $a \prec b$

كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة $a\le x\le b$ و $a \prec x \le b$ و $a\le x \prec b$ و $a\prec x\prec b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

أمثلة

$0 \prec \frac{2}{3} \prec 1$ تأطير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 1

$0,666 \prec \frac{2}{3} \prec 0,667$ تأطير للعدد $\frac{2}{3}$ سعته 10^{-3}

تمارين

تمرين1

1- ليكن $-3 \prec x \prec 5$; $2\prec y \prec 4$ أطر $x^2+3x-\frac{1}{y}-5$

2- ليكن $|y|\prec 1$; $|x|\prec 1$

أ- أطر $\frac{1}{x+y+xy+4}$

ب- أطر $(x+1)(y+1)$. أنشر $(x+1)(y+1)$

استنتج تأطيرا للعدد $\frac{1}{x+y+xy+4}$

تمرين2

1- لنحدد تأطيرا للعدد $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ سعته $7\cdot 10^{-3}$ علما أن $1,41 \prec \sqrt{2} \prec 1,42$

2- نعتبر $-0,01 \prec y \prec 0,02$, $1,53 \prec x \prec 1,54$

حدد تأطيرا للعدد xy سعته $6\cdot 10^{-2}$

تمرين3

ليكن $0,2 \prec y \prec 0,4$, $1,2 \prec x \prec 1,4$

حدد تأطيرا للعدد $\frac{y}{x}$ سعته $0,20$

B) التقريب

1- تعريف

ليكن $a\le x\le b$ أو $a\prec x\le b$ أو $a\le x\prec b$ أو $a\prec x\prec b$ تأطيرا للعدد x سعته $b-a$

العدد a يسمى تقريب للعدد x إلى $b-a$ بتفريط

العدد b يسمى تقريب للعدد x إلى $b-a$ بإفراط

أمثلة

لدينا $3,14 \prec \pi \prec 3,15$

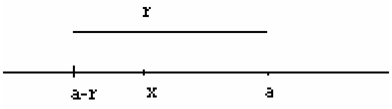
العدد $3,14$ تقريب للعدد π إلى 10^{-2} بتفريط

العدد $3,15$ تقريب للعدد π إلى 10^{-2} بإفراط

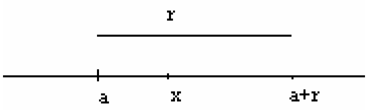
خاصية

ليكن a و x عددين حقيقين و a عددا حقيقيا موجب قطعا

العدد a تقريب للعدد x إلى r بإفراط إذا وفقط إذا كان $a-r \leq x \leq a$



العدد a تقريب للعدد x إلى r بتفريط إذا وفقط إذا كان $a \leq x \leq a+r$



تمرين لنحدد تقريبات للعدد $\frac{22}{3}$ إلى 10^{-3} بإفراط

تمرين ليكن $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

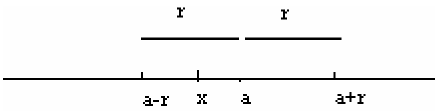
إذا علمت أن $2,236$ تقريب للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-3} بتفريط فأعط تقريب للعدد x إلى 10^{-3} بتفريط ثم بإفراط

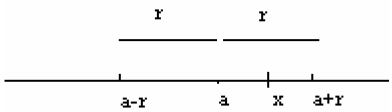
2- قيمة مقربة

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا

كل عدد حقيقي a يحقق $|x-a| \leq r$ يسمى قيمة مقربة (أو تقريبا) للعدد x إلى r (أو بالدقة r)





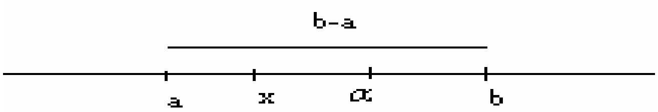
أمثلة

$\left|\frac{22}{7}-3,14\right| \leq 0,003$ إذن $3,14$ تقريب للعدد $\frac{22}{7}$ إلى $3 \cdot 10^{-3}$

خاصية

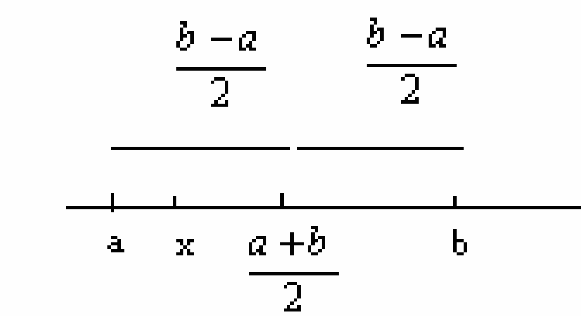
ليكن $x \in [a,b]$

كل عدد α من $[a,b]$ تقريب للعدد x إلى $b-a$



ملاحظة

إذا كان $x \in [a,b]$ فان $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$



مثال

$1,41 \prec \sqrt{2} \prec 1,42$

العدد $1,415$ تقريب للعدد $\sqrt{2}$ الى $0,005$

تمرين

لنبين أن $-0,14$ تقريب للعدد $\frac{-1}{7}$ بالدقة $5 \cdot 10^{-3}$

3- التقريبات العشرية

أ- استعمال المحسبة لتحديد تقريبات عشرية

....

ب-التقريب العشري

ليكن x عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا

نقبل انه يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p حيث $10^{-n}p \leq x \prec 10^{-n}(p+1)$

العدد $10^{-n}p$ **تقريب العشري** للعدد x بتفريط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

العدد $10^{-n}(p+1)$ **تقريب العشري** للعدد x بإفراط إلى 10^{-n} (أو من الرتبة n)

اصطلاح:

التقريب العشري من الرتبة n الأكثر قربا من العدد x يسمى الجبر $(arrondi)$ من الرتبة n للعدد x

مثال لدينا $666\cdot 10^{-3} \prec \frac{2}{3} \prec 667\cdot 10^{-3}$

العدد $0,666$ تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3 بتفريط

العدد $0,667$ تقريب العشري للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3 بإفراط

نلاحظ أن $0,667-\frac{2}{3}=\frac{0,001}{3}$; $\frac{2}{3}-0,666=\frac{0,002}{3}$

$0,667$ الجبر للعدد $\frac{2}{3}$ من الرتبة 3

تمرين

$1,24$ التقريب العشري للعدد x من الرتبة 2 بتفريط و $-0,31 \prec y \prec -0,25$

أطر $\frac{y}{x}$ تأطيرا سعته $0,05$