

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الترتيب في مجموعة الأعداد
الحقيقية
المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

أكاديمية
الجهة
الشرقية

$$a^2 = (10\sqrt{51})^2 = 5100$$

$$b^2 = (70 + \sqrt{2})^2 = 4900 + 140\sqrt{2} + 2 = 4902 + 140\sqrt{2}$$

$$a^2 - b^2 = 198 - 140\sqrt{2} = 2(99 - 70\sqrt{2})$$

لدينا : $99 - 70\sqrt{2} > 0$ لأن $(99)^2 = 9801$ و $(70\sqrt{2})^2 = 9800$ ومنه

$$2(99 - 70\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^{+*} \text{ أي } 99 - 70\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+*}$$

ومنه : $a^2 - b^2 > 0$ ووبما أن العددين: a و b موجبين
فان $a > b$:

$$\text{تمرين 7: نضع } a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \text{ و } b = \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$$

$$(1) \text{ بين أن : } b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

(2) قارن العددين: a و b
(الجواب: 1)

$$b - a = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$b - a = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2}}{14}$$

$$b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

(2) مقارنة العددين: a و b

$$\text{وجدنا : } b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

لدينا : $8 > 5\sqrt{2}$ لأن $(8)^2 = 64$ و $(5\sqrt{2})^2 = 50$ ومنه

$$8 - 5\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+*} \text{ ومنه : } \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14} \in \mathbb{R}^{+*} \text{ وبالتالي : } b > a$$

$$\text{تمرين 8: نضع } a = 3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\text{و } b = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$$

$$(1) \text{ بين أن : } a - b = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$$

(2) قارن العددين: a و b

(الجواب: 1)

$$a - b = \left(3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}} \right) - (\sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2})$$

$$a - b = (9\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) - (2\sqrt{7} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$$

$$a - b = 9\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$a - b = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$$

$$\text{تمرين 1: قارن بين } \frac{100}{101} \text{ و } \frac{101}{102}$$

(الجواب:

$$\text{نحسب الفرق : } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\text{اذن : } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101} \text{ ومنه } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\text{تمرين 2: قارن : } a \text{ و } b \text{ ونضع } a = 2 + \sqrt{3} \text{ و } b = 2\sqrt{3}$$

(الجواب:

لدينا $a - b = 2 - \sqrt{3}$ و بما أن $2 - \sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعاً

أي: $(a - b) \in \mathbb{R}_+^*$ فان: $a > b$

$$\text{تمرين 3: } a \in \mathbb{R} \text{ قارن : } 2a \text{ و } a^2 + 1$$

$$\text{الجواب : } (a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن: $a \in \mathbb{R}$

$$\text{تمرين 4: قارن العددين: } a = \sqrt{6} \text{ و } b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

(الجواب: نحسب الفرق :

$$a - b = \sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} \times 2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$$

$$\sqrt{3} \text{ } a - b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} \times (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \text{ } b = (\sqrt{2} - 1)$$

لدينا : $\sqrt{2} > 1$ لأن $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{3} > 1$ لأن $(\sqrt{3})^2 = 3$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a > b$

$$\text{تمرين 5: قارن العددين: } a = \sqrt{10} \text{ و } b = \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$$

(الجواب: نحسب الفرق :

$$a - b = \sqrt{10} - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{5} \times 2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1)$$

$$\sqrt{5} \text{ } a - b = \sqrt{5} \times \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{5} \times (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1) \text{ } b = (\sqrt{2} - 1)$$

لدينا : $\sqrt{2} > 1$ لأن $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{5} > 1$ لأن $(\sqrt{5})^2 = 5$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{5} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a > b$

$$\text{تمرين 6: قارن العددين: } a = 10\sqrt{51} \text{ و } b = 70 + \sqrt{2}$$

(الجواب: لنقارن : a^2 و b^2

(2) استنتج أنه إذا كان a و b موجبين فإن $a+b > \sqrt{2}$
الجواب: $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ و $a^2 + b^2 = 2$
 (1) لدينا $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 2 + 2ab$
 ومنه $(a+b)^2 = 2(1+ab)$
 (2) الاستنتاج: $a \in \mathbb{R}^+$ و $b \in \mathbb{R}^+$
 إذن: $a \geq 0$ و $b \geq 0$ ومنه $a+b \geq 0$ و $ab \geq 0$
 علما أن: $(a+b)^2 = 2(1+ab)$ و $1+ab \geq 1$
 فإن: $(a+b)^2 > 2$ ومنه $a+b > \sqrt{2}$ لأن $a+b \geq 0$
تمرين 13: ليكن x عنصرا من \mathbb{R}^+ .

1. قارن العددين: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$
 2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ و $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$
الجواب (1): عنصرا من \mathbb{R}^+ يعني $x \geq 0$
 لدينا $x+2 \geq x$ لأن $(x+2) - x \geq 0$
 إذن: $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$ وإضافة $\sqrt{x+1}$ نجد النتيجة المطلوبة:
 أي أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$
 (2) الاستنتاج:
 بضرنا في المرافق نجد المتساوية التالية:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

أي أن:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2 - x - 1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{ولدينا أيضا: } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\text{أي أن: } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

وبما أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

إذن نستنتج أن: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

تمرين 14: ليكن x عددا حقيقيا موجبا.

قارن العددين: x و $2\sqrt{x} - 1$.

$$\text{الجواب: } x - (2\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \times 1 + 1^2 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$$

ومنه $x \geq (2\sqrt{x} - 1)$ مهما يكن $x \in \mathbb{R}^+$

تمرين 15: ليكن n عددا صحيحا طيبيا.

نضع: $a = \sqrt{4n^2 + 1}$ و $b = 2n + 1$ قارن العددين a و b .

الجواب: لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$$a^2 = (\sqrt{4n^2 + 1})^2 = 4n^2 + 1$$

$$b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n \geq 0$$

ومنه $b^2 \geq a^2$ إذن نستنتج أن $b \geq a$ مهما يكن $x \in \mathbb{N}$

(2) مقارنة العددين: a و b
 وجدنا: $a - b = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$
 لدينا: $4\sqrt{2} > 2\sqrt{7}$ لأن $(4\sqrt{2})^2 = 32$ و $(2\sqrt{7})^2 = 28$
 ومنه $a > b$ وبالتالي $4\sqrt{2} - 2\sqrt{7} \in \mathbb{R}^{**}$

تمرين 9: قارن العددين: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$\text{الجواب:} \text{نحسب الفرق: } \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2\sqrt{3}+2 - (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}) - ((\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

لدينا: $3\sqrt{3} > 5$ لأن $(3\sqrt{3})^2 = 27$ و $(5)^2 = 25$ ومنه $3\sqrt{3}-5 \in \mathbb{R}^{**}$

ومنه: $\frac{3\sqrt{3}-5}{2} \in \mathbb{R}^{**}$ وبالتالي: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

تمرين 10: ليكن a و b عنصريين من \mathbb{R}^* .

نضع: $x = \frac{7a+2b}{7a}$ و $y = \frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y .

$$\text{الجواب:} \text{نحسب الفرق: } x - y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b}$$

$$x - y = \frac{(7a+2b)^2 - 7a \times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 + 14ab + 4b^2 - 56ab}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{49a^2 - 28ab + 4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a)^2 - 2 \times 7a \times 2b + (2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$

لأن: $(7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^+$ و $7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي: $x \geq y$

تمرين 11: ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين قطعاً ومختلفين

$$\text{اعط إشارة الخارج: } Z = \frac{x^2 - y^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

الجواب: $x > 0$ و $y > 0$ و $x \neq y$ لنحدد إشارة الخارج Z :

$$Z = \frac{x^2 - y^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{x^2 - y^2}{\frac{y-x}{xy}} = (x-y)(x+y) \times \frac{xy}{y-x}$$

$$Z = (x-y)(x+y) \times \frac{xy}{-(x-y)} = -xy(x+y)$$

لدينا $x > 0$ و $y > 0$ إذن $xy > 0$ و $x+y > 0$ ومنه $-xy < 0$ وبالتالي: $Z < 0$

تمرين 12: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $a^2 + b^2 = 2$

$$(1) \text{ بين أن: } (a+b)^2 = 2(1+ab)$$

تمرين 19: نضع $x \in [1;3]$ و $y \in [2;4]$
 اعط تظييرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$
 و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

(2) حدد سعة التأطير لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

(الجواب: 1): $x \in [1;3]$ يعني $1 \leq x \leq 3$

$y \in [2;4]$ يعني $2 \leq y \leq 4$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $2^2 \leq y^2 \leq 4^2$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $3 \times 2 \leq 3y \leq 3 \times 4$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$: إذن $1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2}$: إذن $\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

(2) تأطير A : $6 \leq 3y \leq 12$ يعني $-12 \leq -3y \leq -6$

وحسب النتائج السابقة وجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$$1+4+2-12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9+16+6-6$$

وبالتالي: $-5 \leq A \leq 25$

وسعة التأطير هي: $r = 25 - (-5) = 30$

تأطير B : $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq 2x \leq 6$ يعني $2-1 \leq 2x-1 \leq 6-1$

يعني $1 \leq 2x-1 \leq 5$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq x+1 \leq 4$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \leq 2x-1 \leq 5$ و $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ طرف

لطرف نجد

$$\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2}$$

وسعة التأطير هي: $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

تمرين 20: نضع $x \in [-3;2]$ و $y \in [-7;1]$

(1) اعط تظييرا للأعداد التالية: $x+2y$ و $2x-y$ و

$$-5x+3y-8$$

(2) اعط تظييرا للعدد: xy

(الجواب: 1): $x \in [-3;2]$ يعني $-3 \leq x \leq 2$

• $y \in [-7;1]$ يعني $-7 \leq y \leq 1$

ومنه: $-7 \times 2 \leq 2y \leq 1 \times 2$

إذن: $-7 \times 2 + (-3) \leq 2y + x \leq 1 \times 2 + 2$

إذن: $-17 \leq 2y + x \leq 4$

• لدينا $-6 \leq 2x \leq 4$ و $-1 \leq -y \leq 7$

إذن: $-6 - 1 \leq 2x - y \leq 4 + 7$

إذن: $-7 \leq 2x - y \leq 11$

• لدينا $-3 \leq x \leq 2$: إذن $-10 \leq -5x \leq 15$

تمرين 16: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x < y < 3$

1. بين أن: $x + y - 6 < 0$

2. قارن العددين $a = x^2 - 6x + 1$ و $b = y^2 - 6y + 1$.

الجواب:

(1) لدينا $x < y < 3$ إذن $x < 3$ و $y < 3$ ومنه $x + y < 6$

وبالتالي: $x + y - 6 < 0$

(2) نحسب الفرق: $a - b = (x^2 - 6x + 1) - (y^2 - 6y + 1)$

$$a - b = x^2 - 6x + 1 - y^2 + 6y - 1 = x^2 - y^2 - 6x + 6y$$

$$a - b = (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6)$$

لدينا $x < y$ إذن $x - y \in \mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x + y - 6 \in \mathbb{R}^-$

ومنه $a - b \in \mathbb{R}^+$ أي: $a > b$ وبالتالي

تمرين 17: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J

حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

(1) $I =]-3, 7[$ و $J = [-1, +\infty[$

(2) $I =]-\infty, 5[$ و $J = [4, 10]$

(3) $I = [0, 10[$ و $J = [-5, -1]$

(4) $I = \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$ و $J = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$

الجواب:

(1) $I \cup J =]-3; +\infty[$ و $I \cap J =]-1, 7[$

(2) $I \cup J =]-\infty; 10]$ و $I \cap J = [4, 5[$

(3) $I \cup J = [-5; 10]$ و $I \cap J = \emptyset$

(4) $I \cup J =]-1, 2]$ و $I \cap J = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right[$

تمرين 18: حل في \mathbb{R} النظم الآتية

(1) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$

الجواب: الرمز يعني التقاطع

(1) $x \in]5, +\infty[$ يعني $x > 5$

$x \in]-\infty, 4]$ يعني $x \leq 4$

$S =]5, +\infty[\cap]-\infty, 4] = \emptyset$

(2) $x \in [-3, +\infty[$ يعني $x \geq -3$

$x \in]2, +\infty[$ يعني $x > 2$

$S =]2, +\infty[\cap [-3, +\infty[=]2, +\infty[$

(3) $x \in]7, +\infty[$ يعني $x > 7$

$x \in [0, +\infty[$ يعني $x \geq 0$

$S =]7, +\infty[\cap [0, +\infty[=]7, +\infty[$

(4) $x \in]-7; 10[$ يعني $-7 < x < 10$

$x \in [-3; 0]$ يعني $-3 \leq x \leq 0$

$S =]-7; 10[\cap [-3; 0] = [-3; 0]$

لدينا $-7 \leq y \leq 1$ اذن : $-21 \leq 3y \leq 3$

اذن : $-31 \leq -5x + 3y \leq 18$

اذن : $-23 \leq -5x + 3y + 8 \leq 26$

(2) تأطير: xy

لدينا $-3 \leq x \leq 2$ و $-7 \leq y \leq 1$

الحالة 1:

$-7 \leq y \leq 0$ و $-3 \leq x \leq 0$

يعني $0 \leq -y \leq 7$ و $0 \leq -x \leq 3$

ومنه : $0 \leq xy \leq 21$ أي $0 \leq (-x) \times (-y) \leq 21$ (1)

الحالة 2:

$0 \leq y \leq 1$ و $-3 \leq x \leq 0$

يعني $0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq -x \leq 3$

ومنه : $-3 \leq xy \leq 0$ أي $0 \leq (-x) \times y \leq 3$ (2)

الحالة 3:

$-7 \leq y \leq 0$ و $0 \leq x \leq 2$

يعني $0 \leq -y \leq 7$ و $0 \leq x \leq 2$

ومنه : $-14 \leq xy \leq 0$ أي $0 \leq (-y) \times x \leq 14$ (3)

الحالة 4:

$0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq x \leq 2$

ومنه : $0 \leq xy \leq 2$ (4)

من : (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$-14 \leq xy \leq -21$

تمرين 21: ليكن $1 \leq x \leq 2$ و $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

نضع : $E = x^2 - y^2 + x + y$

(1) اعط تأطيرا للعدد E

(2) تحقق أن : $E = (x+y)(x-y+1)$

واستنتج تأطيرا آخر للعدد E

(3) استنتج أن : $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

الجواب (1): تأطيرا للعدد $E = x^2 - y^2 + x + y$

لدينا $1 \leq x \leq 2$ و $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

اذن : $1 \leq x^2 \leq 4$ و $\frac{1}{4} \leq y^2 \leq \frac{9}{4}$

ومنه : $-\frac{9}{4} \leq -y^2 \leq -\frac{1}{4}$

اذن : $1 - \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq 4 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}$

ومنه : $\frac{1}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$ (α)

(2) نتحقق من أن : $E = (x+y)(x-y+1)$???

لدينا $E = x^2 - y^2 + x + y$

اذن : $E = (x+y)(x-y) + x + y$

اذن : $E = (x+y)(x-y+1)$

استنتاج: لدينا $1 \leq x \leq 2$ و $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

اذن : $\frac{3}{2} \leq x + y \leq \frac{7}{2}$ (1) و لدينا $-\frac{3}{2} \leq -y \leq -\frac{1}{2}$

اذن : $1 - \frac{3}{2} \leq x - y \leq 2 - \frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{3}{2}$

يعني (2) $\frac{1}{2} \leq x - y + 1 \leq \frac{7}{4}$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$\frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{49}{8}$

(β) ومنه تأطير آخر للعدد E

(3) استنتاج

من العلاقتين (α) و (β) نستنتج أن :

$E \in \left[\frac{1}{4}; \frac{29}{4} \right] \cap \left[\frac{3}{4}; \frac{49}{8} \right]$

يعني $E \in \left[\frac{3}{4}; \frac{29}{4} \right]$ أي $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

تمرين 22: ليكن $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ و $|2x + y| \leq \frac{2}{3}$

بين أن : $\frac{y}{x} \in \left[-4; -\frac{1}{2} \right]$

الجواب: تأطير العدد y أولا :

$|2x + y| \leq \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{2}{3} \leq 2x + y \leq \frac{2}{3}$

ولدينا $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ اذن : $1 \leq 2x \leq \frac{4}{3}$ يعني $-\frac{4}{3} \leq -2x \leq -1$

ومنه $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \leq y \leq \frac{2}{3} - 1$ ومنه $-\frac{2}{3} \leq y \leq -\frac{1}{3}$

ومنه $\frac{1}{3} \leq -y \leq 2$

ولدينا أيضا : $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 2$

اذن : $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \leq \frac{1}{x} \times (-y) \leq 4$

اذن : $4 \leq -\frac{y}{x} \leq -\frac{1}{2}$ اذن : $\frac{1}{2} \leq -\frac{y}{x} \leq 4$

يعني $\frac{y}{x} \in \left[-4; -\frac{1}{2} \right]$

تمرين 23: التاثير و العمليات

1. تحقق من أن : $14^2 < 200 < 15^2$

ثم استنتج أن : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2. بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب (1): لدينا $14^2 = 196$ و $15^2 = 225$

ومنه $14^2 < 200 < 15^2$

(2) أنشر $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$

(3) نضع: $A = \sqrt{55-12\sqrt{21}}$ بسط A

(4) اذا علمت أن: $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ وأن: $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

اعط تقريبا للعدد A الى 0,5 بتقريب وافراط

الجواب

(1) مقارنة العددين: $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$

لمقارنة العددين نقارن مربعيهما: $(2\sqrt{7})^2 = 28$ و $(3\sqrt{3})^2 = 27$

اذن $(2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$ ومنه $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

(2) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2$

$(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2 = 27 - 12\sqrt{21} + 28 = 55 - 12\sqrt{21}$

(3) نضع: $A = \sqrt{55-12\sqrt{21}}$

يعني: $A = \sqrt{(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2}$ يعني: $A = |3\sqrt{3}-2\sqrt{7}|$

ومنه: $A = 3\sqrt{3}-2\sqrt{7} > 0$: لأن $3\sqrt{3} > 2\sqrt{7}$

(4) لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ اذن: $5,1 < 3\sqrt{3} < 5,4$

ومنه: $-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$

ولدينا $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ اذن: $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

ومنه: $5,2 - 5,4 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 5,4 - 5,1$

يعني: $-0,2 < A < 0,3$

لدينا $0,3 - (-0,2) = 0,5$

اذن: $0,3$ هي قيمة مقربة للعدد A الى 0,5 بافراط

و $-0,2$ هي قيمة مقربة للعدد A الى 0,5 بتقريب

تمرين 27: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية: (1) $|x-1|=5$

(2) $|x+2|=-1$ (3) $|2x+1|=|x-3|$

الجواب (1): $|x-1|=5$ يعني $x-1=5$ أو $x-1=-5$

يعني $x=6$ أو $x=-4$ اذن: $S = \{-4; 6\}$

(2) المعادلة: $|x+2|=-1$ ليس لها حل في \mathbb{R} لأن القيمة المطلقة

دائما موجبة اذن: $S = \emptyset$

(3) $|2x+1|=|x-3|$ يعني $2x+1=x-3$ أو $2x+1=-(x-3)$

يعني $x=-4$ أو $2x+1=-x+3$ يعني $x=-4$ أو $x=\frac{2}{3}$

اذن: $S = \left\{-4; \frac{2}{3}\right\}$

تمرين 28: حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية: (1) $|x-1| \leq 2$

(2) $|x+2| \geq 3$ (3) $|2x+1| < 6$

الجواب (1): $|x-1| \leq 2$ يعني $-2 \leq x-1 \leq 2$ يعني

$-1 \leq x \leq 3$ يعني $-2+1 \leq x-1+1 \leq 2+1$

اذن: $S = [-1; 3]$

(2) $|x+2| \geq 3$ يعني $x+2 \geq 3$ أو $x+2 \leq -3$

يعني $x \geq 1$ أو $x \leq -5$ يعني $x \in [1; +\infty[$ أو $x \in]-\infty; -5]$

اذن: $S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$

لدينا $14^2 < 200 < 15^2$ اذن نستنتج أن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

اذن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي: $14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$

أي: $14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

(2) لدينا $22^2 = 484$ و $22^2 = 529$ ومنه $22^2 < 500 < 23^2$

لدينا $22^2 < 500 < 23^2$ اذن نستنتج أن: $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

اذن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي: $22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$

أي: $22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن: $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

(3) لدينا $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

اذن: $1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$ أي: $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$

و أيضا بضرب طرف طرف نجد: $1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$

أي: $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

تمرين 24:

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

(1) $|\sqrt{2}-2|$ (2) $|3-2\sqrt{3}|$ (3) $|\sqrt{5}-\sqrt{2}|$

(4) $A = |4-2\sqrt{3}| - |5-3\sqrt{3}| + |9-5\sqrt{3}|$

الجواب:

(1) لدينا $\sqrt{2} < 2$ اذن: $\sqrt{2}-2 \in \mathbb{R}^-$ ومنه

$|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = -\sqrt{2}+2$

(2) لدينا $3 < 2\sqrt{3}$ لأن: $3^2 < (2\sqrt{3})^2$

اذن: $3-2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ ومنه $3-2\sqrt{3} = -(3-2\sqrt{3}) = -3+2\sqrt{3}$

(3) لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ اذن: $\sqrt{5}-\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ ومنه $|\sqrt{5}-\sqrt{2}| = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

(4) $A = |4-2\sqrt{3}| - |5-3\sqrt{3}| + |9-5\sqrt{3}|$

$A = 4-2\sqrt{3} - (-(5-3\sqrt{3})) + (9-5\sqrt{3})$

$A = 4-2\sqrt{3} + 5-3\sqrt{3} + 9-5\sqrt{3} = 18-10\sqrt{3}$

تمرين 25:

1. أحسب: $(3\sqrt{2}-5)^2$

2. قارن العددين: 5 و $3\sqrt{2}$

3. بسط: $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

الجواب (1): $(3\sqrt{2}-5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25$

$(3\sqrt{2}-5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 43 - 30\sqrt{2}$

(2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما: $(3\sqrt{2})^2 = 18$ و $(5)^2 = 25$

اذن $5 > 3\sqrt{2}$ ومنه $3\sqrt{2}-5 \in \mathbb{R}^-$

(3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2} = |3\sqrt{2}-5|$

لأن: $3\sqrt{2}-5 \in \mathbb{R}^-$ إذن: $-(3\sqrt{2}-5)$

وبالتالي: $\sqrt{43-30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}+5$

تمرين 26:

(1) قارن العددين: $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$

$$x - y = 3: \text{ ونعلم أن } E = 2x - 2y + 1 = 2(x - y) + 1$$

$$\text{ومنه: } E = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$(2) \text{ - نبين أن: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{نعلم أن } x - y = 3: \text{ إذن } x = y + 3$$

$$\text{ولدينا } x \geq \frac{1}{2}: \text{ إذن } y + 3 \geq \frac{1}{2}: \text{ إذن } y \geq \frac{1}{2} - 3$$

$$\text{إذن: } y \geq -\frac{5}{2} \text{ وبما أن } y \leq 1 \text{ فإن } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{- نبين أن: } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$\text{نعلم أن } x - y = 3: \text{ إذن } y = x - 3$$

$$\text{ووجدنا سابقاً أن: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{إذن: } -\frac{5}{2} \leq x - 3 \leq 1 \text{ يعني } -\frac{5}{2} + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 1 + 3$$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$(3) \text{ حساب قيمة العدد } F \text{ حيث: } F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$$

$$\text{نبحث عن إشارة } x + y - 5$$

$$\text{ووجدنا سابقاً أن: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ و } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$\text{إذن: } -2 \leq x + y \leq 5 \text{ يعني } \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \leq x + y \leq 1 + 4$$

$$\text{يعني } -7 \leq x + y - 5 \leq 0 \text{ يعني } -2 - 5 \leq x + y - 5 \leq 5 - 5$$

$$\text{أي أن: } x + y - 5 \text{ سالب}$$

$$\text{نبحث عن إشارة } x + y + 2$$

$$\text{وجدنا سابقاً أن: } -2 \leq x + y \leq 5$$

$$\text{يعني } 0 \leq x + y + 2 \leq 7 \text{ يعني } -2 + 2 \leq x + y + 2 \leq 5 + 2$$

$$\text{أي أن: } x + y + 2 \text{ موجب}$$

$$\text{إذن: } F = |x + y - 5| + |x + y + 2| = -(x + y - 5) + x + y + 2$$

$$\text{إذن: } F = -x - y + 5 + x + y + 2 = -x - y + 5 + x + y + 2 = 7$$

$$\text{تمرين 31: ليكن } a \text{ و } b \text{ عددين حقيقيين بحيث: } a \geq -2 \text{ و } b \leq -1 \text{ و } a - b = 6$$

$$(1) \text{ أحسب قيمة العدد } A \text{ حيث: } A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$$

$$(2) \text{ بين أن: } a \leq 5 \text{ و } b \geq -8$$

$$(3) \text{ أحسب قيمة العدد } F \text{ حيث: } F = |a + b - 4| + |a + b + 10|$$

$$\text{الجواب: (1) } a + 2 \geq 0 \text{ يعني } a \geq -2$$

$$b + 1 \leq 0 \text{ يعني } b \leq -1$$

$$\text{ولدينا } A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2} = |a+2| + |b+1|$$

$$A = a + 2 - (b + 1) = a - b + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$(4) \text{ - نبين أن: } a \leq 5$$

$$\text{نعلم أن: } b \leq -1 \text{ و } a - b = 6 \text{ يعني } a - 6 = b \text{ و } a - 6 \leq -1$$

$$\text{يعني } a \leq 5$$

$$\text{- نبين أن: } b \geq -8$$

$$\text{نعلم أن: } a \geq -2 \text{ و } a - b = 6 \text{ يعني } a - 6 \geq -2$$

$$\text{يعني } b \geq -8$$

$$(3) \text{ لدينا } -8 \leq b \leq -1 \text{ و } -2 \leq a \leq 5$$

$$\text{إذن: } -10 \leq a + b \leq 4$$

$$(3) |2x+1| < 6 \text{ يعني } -6 < 2x+1 < 6 \text{ يعني } -6-1 < 2x+1-1 < 6-1$$

$$\text{يعني } -7 < 2x < 5 \text{ يعني } -7 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني } \frac{-7}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ إذن: } S = \left] -\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right[$$

تمرين 29: الى أي مجال ينتمي العدد x في الحالات التالية:

$$(1) -5 < x \leq 3$$

$$(2) x \geq 10 \text{ أو } x < 7$$

$$(3) x > 1 \text{ و } x < 2$$

$$(4) |x-2| < 1$$

$$(5) |x+1| \geq 2$$

$$(6) 1 < |x-1| < 2$$

$$\text{الجواب: (1) } -5 < x \leq 3 \text{ يعني } x \in]-5; 3]$$

$$(2) x < 7 \text{ أو } x \geq 10 \text{ يعني } x \in]-\infty; 7] \text{ أو } x \in [10; +\infty[$$

$$\text{يعني } x \in]-\infty; 7] \cup [10; +\infty[$$

(3) **طريقة 1**

$$x < 2 \text{ و } x > 1 \text{ يعني } x \in]-\infty; 2[\text{ و } x \in]1; +\infty[$$

$$\text{يعني } x \in]-\infty; 2[\cap]1; +\infty[$$

$$\text{يعني } x \in]1; 2[$$

(3) **طريقة 2**

$$x < 2 \text{ و } x > 1 \text{ يعني } 1 < x < 2 \text{ يعني } x \in]1; 2[$$

$$(4) |x-2| < 1 \text{ يعني } -1 < x-2 < 1 \text{ يعني } -1+2 < x-2+2 < 1+2$$

$$\text{يعني } 1 < x < 3 \text{ يعني } x \in]1; 3[$$

$$(5) |x+1| \geq 2 \text{ يعني } x+1 \geq 2 \text{ أو } x+1 \leq -2$$

$$\text{يعني } x \geq 1 \text{ أو } x \leq -3 \text{ يعني } x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

$$(6) 1 < |x-1| < 2 \text{ يعني } \begin{cases} |x-1| < 2 \\ |x-1| > 1 \end{cases}$$

$$\text{يعني } \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x < 0 \text{ و } x > 2 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} -2 < x-1 < 2 \\ x-1 < -1x \text{ و } -1 < 1x \end{cases}$$

$$\text{يعني } x \in]-1; 3[\cap (]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[)$$

$$\text{يعني } x \in]-1; 0[\cup]2; 3[$$

$$\text{تمرين 30: ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين بحيث: } y \leq 1 \text{ و } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{و } x - y = 3$$

$$1. \text{ أحسب قيمة العدد } E \text{ حيث: } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$$

$$2. \text{ بين أن: } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ و } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$3. \text{ أحسب قيمة العدد } F \text{ حيث: } F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$$

$$\text{الجواب: (1) } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2} = |2x-1| + |2y-2|$$

$$\text{لدينا } x \geq \frac{1}{2} \text{ يعني } 2x \geq 1 \text{ يعني } 2x-1 \geq 0$$

$$\text{ولدينا } y \leq 1 \text{ يعني } 2y \leq 2 \text{ يعني } 2y-2 \leq 0$$

$$\text{ومنه: } E = |2x-1| + |2y-2| = 2x-1 - (2y-2)$$

(3) بين أن : 1,1 هي قيمة مقربة للعدد $\sqrt{1,2}$ بالدقة $\frac{1}{30}$

الجواب: لدينا: $a \geq 1$ نضع $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

(1) نبين أن : $a(A+1)(A-1) = 1$ ؟؟

$$\text{لدينا } (A+1)(A-1) = A^2 - 1 = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a}}\right)^2 - 1$$

$$(A+1)(A-1) = 1 + \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{a}$$

$$\text{اذن : } (A+1)(A-1) = \frac{1}{a}$$

$$\text{ومنه : } a(A+1)(A-1) = 1$$

(2) نبين أن : $2 \leq A+1 \leq 3$

$$\text{لدينا } a \geq 1 > 0 \text{ اذن : } \frac{1}{a} \geq 0$$

$$\text{ومنه : } \frac{1}{a} + 1 \geq 1 \text{ يعني } A \geq 1 \text{ ومنه : } A+1 \geq 2 \quad (1)$$

$$\text{لدينا } a \geq 1 \text{ اذن : } \frac{1}{a} \leq 1 \text{ ومنه : } 1 + \frac{1}{a} \leq 2$$

$$\text{ومنه : } A \leq \sqrt{2} \text{ ومنه : } A+1 \leq \sqrt{2} + 1 \leq 3 \quad (2)$$

من (1) و (2) : نستنتج أن : $2 \leq A+1 \leq 3$

الاستنتاج :

$$\text{لدينا } 2 \leq A+1 \leq 3 \text{ ولدينا } a(A+1)(A-1) = 1$$

$$\text{يعني : } A-1 = \frac{1}{a(A+1)}$$

$$\text{ومن جهة أخرى لدينا : } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{A+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{اذن : } \frac{1}{3a} \leq A-1 \leq \frac{1}{2a} \text{ ومنه : } \frac{1}{3a} \leq \frac{1}{a(A+1)} \leq \frac{1}{2a}$$

$$\text{ومنه : } \frac{1}{3a} + 1 \leq A \leq \frac{1}{2a} + 1$$

$$(3) \text{ لدينا } 1,2 = 1 + 0,2 = 1 + \frac{1}{5}$$

$$\text{يعني : } A = \sqrt{1,2} = \sqrt{1 + \frac{1}{5}} \text{ يعني : } a = 5$$

$$\frac{1}{15} + 1 \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{1}{10} + 1$$

$$\frac{16}{15} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{11}{10}$$

$$\frac{32}{30} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{33}{30} \quad \left(\frac{33}{30} = 1,1\right)$$

$$\text{و لدينا } \frac{33}{30} - \frac{32}{30} = \frac{1}{30}$$

اذن : 1,1 هي قيمة مقربة للعدد $\sqrt{1,2}$ بالدقة $\frac{1}{30}$

يعني $0 \leq a+b+10 \leq 14$ و $-14 \leq a+b-4 \leq 0$

$$\text{اذن : } |a+b-4| = -(a+b-4) = -a-b+4$$

$$\text{و } |a+b+10| = a+b+10$$

$$\text{ولدينا } B = |a+b-4| + |a+b+10|$$

$$\text{اذن : } B = |a+b-4| + |a+b+10| = -a-b+4 + a+b+10$$

$$\text{اذن : } B = 14$$

تمرين 32: نعلم أن $\sqrt{7} = 2,6457513110 \dots\dots\dots$

1. حدد قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

2. حدد قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

3. حدد قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتقريب.

الجواب: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$

1. العدد 2,645 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

2. العدد 2,646 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

3. العدد 2,6455 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتقريب.

تمرين 33: لدينا $(\pi \approx 3.1415926\dots)$

حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتقريب و بإفراط

الجواب: $3.14 < \sqrt{10} < 3.15$

ولدينا : $3.15 - 3.14 = 0.01 = 10^{-2}$ اذن

• العدد 3.14 قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-3} بتقريب.

• العدد 3.15 قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمرين 34:

أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب (استعمل المحسبة).

$$(\sqrt{10} \approx 3.16227766)$$

الجواب: $3.162 < \sqrt{10} < 3.163$

ولدينا : $3.163 - 3.162 = 0.001 = 10^{-3}$ اذن

• العدد 3.162 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

• العدد 3.163 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمرين 35: حدد الجزء الصحيح للعدد $\sqrt{2}$

الجواب: لدينا : $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ و منه فان $E(\sqrt{2}) = 1$

تمرين 36: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4} بتقريب

(استعمل المحسبة). علما أن : $(\sqrt{3} \approx 1.732050808\dots)$

الجواب: لدينا : $1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$

$$\text{أي } (1732) \cdot 10^{-3} \leq \sqrt{3} < (1732+1) \cdot 10^{-3}$$

إذن : 1,732 هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

و 1,733 هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمرين 37: ليكن $a \geq 1$ نضع $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

(1) بين أن : $a(A+1)(A-1) = 1$

(2) بين أن : $2 \leq A+1 \leq 3$

واستنتج أن : $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$