تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن $n \in \mathbb{N}$ قارن العددين

$$A = \frac{1}{(n+5)(n+1)} \ ; B = \frac{1}{(n+4)(n+2)}$$

الجواب :

نقارن مقامي العددين A و B

$$(n+5)(n+1) - (n+4)(n+2)$$

$$= n^2 + 6n + 5 - n^2 - 6n - 2$$

$$= 3 > 0$$

يعني $(n+5)(n+1) > (n+4)(n+2)$

$$\frac{1}{(n+5)(n+1)} < \frac{1}{(n+4)(n+2)}$$

$$A < B$$

تمرين 2 :

لتكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $-2 < b < -1$ و $2 < a < 3$ اعط تأطير للأعداد التالية :

$a+b$ و $2a-b$ و $2a^2+1$ و $4-b^2$

الجواب :

لدينا $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$ إذن $0 < a+b < 2$

لدينا $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 4 < 2a < 6 \\ 1 < -b < 2 \end{cases}$

ومنه $5 < 2a - b < 8$

لدينا $2 < a < 3$ ومنه $4 < a^2 < 9$

إذن $8 < 2a^2 < 18$

وبالتالي $\boxed{9 < 2a^2 + 1 < 19}$

لدينا $-2 < b < -1$ لدينا $1 < -b < 2$

ومنه $1 < b^2 < 4$

إذن $-4 < -b^2 < -1$

وبالتالي $\boxed{0 < 4 - b^2 < 3}$

تمرين 3 :

لتكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a \in [1,2]$ و $b \in [-1,3]$

1 – أطر الأعداد $3a \ ; -5b \ ; a^2 \ ; b^2$

2 – استنتج تأطير للعدد : $A = a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1$

3 – اعط تأطيرا للعدد ab

الجواب :

1 - لدينا $a \in [1,2]$ إذن $1 \leqslant a \leqslant 2$

ومنه $\boxed{3 \leqslant 3a \leqslant 6}$

لدينا $a \in [-1,3]$ إذن $-1 \leqslant b \leqslant 3$

ومنه $\boxed{-15 \leqslant -5a \leqslant 5}$

لدينا $1 \leqslant a \leqslant 2$ إذن $\boxed{3 \leqslant 3a \leqslant 6}$

لدينا $-1 \leqslant b \leqslant 3$

يعني $-1 \leqslant b \leqslant 0$ أو $0 \leqslant b \leqslant 3$

يعني $0 \leqslant -b \leqslant 1$ أو $0 \leqslant b \leqslant 3$

إذن $0 \leqslant b^2 \leqslant 9$ أو $0 \leqslant b^2 \leqslant 1$

وبالتالي $\boxed{0 \leqslant b^2 \leqslant 9}$

2 – لدينا
$$\begin{cases} 1 \leqslant a^2 \leqslant 4 \\ -9 \leqslant -b^2 \leqslant 0 \\ 3 \leqslant 3a \leqslant 6 \\ -15 \leqslant -5b \leqslant 5 \end{cases}$$

بجمع هذه المتفاوتات نحصل على :

$$1-9+3-15 \leqslant a^2-b^2+3a-5b \leqslant 4+0+6+5$$

أي $-20 \leqslant A-1 \leqslant 15$

ومنه $\boxed{-19 \leqslant A \leqslant 16}$

تمرين 4:

اكتب التعابير التالية بدون رمز القيمة المطلقة :

$A = |2x-3|$

$B = |4-2x|$

$C = |x-1| - 2|x|$

الجواب :

جدول إشارة $2x-3$

لدينا

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	

ومنه
$$\begin{cases} A = |2x-3| = 2x-3 & ; \ x \geqslant \frac{3}{2} \\ A = |2x-3| = -2x+3 & ; \ x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

جدول إشارة $4-2x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4-2x$		$+$	0	$-$	

إذن
$$\begin{cases} B = |4-2x| = 4-2x & ; \ x \leqslant 2 \\ B = |4-2x| = 4-2x & ; \ x \geqslant 2 \end{cases}$$

جدول إشارة كل من $x-1$ و x

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	

إذن في المجال $]-\infty , 0]$

$$C = |x-1| - 2|x| = -(x-1) + 2x$$
$$= -x + 1 + 2x = x + 1$$

في المجال $[0 , 1]$

$$C = |x-1| - 2|x|$$
$$= -(x-1) + 2x = -x + 1 - 2x$$
$$= -3x + 1$$

في المجال $[1 , +\infty[$

$$C = |x-1| - 2|x|$$
$$= x - 1 - 2x$$
$$= -x - 1$$

خلاصة :
$$\begin{cases} C = x+1 & ; \ x \leqslant 0 \\ C = -3x+1 & ; \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ C = -x-1 & ; \ x \geqslant 1 \end{cases}$$

تمرين 5:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1- $|2x-1| = 5$; 3- $|6-x| = -1$

2- $|2+x| = 0$; 4- $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = 1$

الجواب :

1) $|2x - 1| = 5$

يعني $2x - 1 = 5$ أو $2x - 1 = -5$

يعني $2x = 6$ أو $2x = -4$

يعني $x = \frac{6}{2} = 3$ أو $x = -\frac{4}{2} = -2$

وبالتالي $S = \{-2 , 3\}$

2) $|2 + x| = 0$ يعني $2 + x = 0$

يعني $x = -2$

وبالتالي $S = \{-2\}$

3) $|6 - x| = -1$ غير ممكن لأن القيمة المطلقة دائما موجبة.

$S = \phi$

4) مجموعة التعريف D

$x \in D$ يعني $x + 2 \neq 0$

يعني $x \neq -2$

وبالتالي $S = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| = 1$ يعني $\frac{x - 2}{x + 2} = 1$ أو $\frac{x - 2}{x + 2} = -1$

يعني $x - 2 = x + 2$ أو $x - 2 = -x - 2$

يعني $-2 = 2$ أو $2x = 0$

يعني $x = 0$ أو $-2 = 2$ غير ممكن

وبالتالي $S = \{0\}$

تمرين 6:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

1) $|2x - 1| \leqslant 3$; 3) $|-x - 2| < -11$

2) $|4x - 5| < 0$; 4) $|4x + 5| > -3$

5) $|x - 3| \geqslant 2$

الجواب :

1) $|2x - 1| \leqslant 3$ يعني $-3 \leqslant 2x - 1 \leqslant 3$

يعني $-2 \leqslant 2x \leqslant 4$

يعني $-1 \leqslant x \leqslant 2$

وبالتالي $S = [-1 , 2]$

2) $|4x - 5| < 0$ غير ممكن إذن $S = \phi$

3) $|-x - 2| < -11$ غير ممكن إذن $S = \phi$

4) $|4x + 5| > -3$ هذا دائما صحيح كيفما كانت x ومنه $S = \mathbb{R}$

5) $|x - 3| \geqslant 2$ يعني $x - 3 \geqslant 2$ أو $x - 3 \leqslant -2$

يعني $x \geqslant 5$ أو $x \leqslant 1$

وبالتالي $S =]-\infty , 1] \cup [5 , +\infty[$

تمرين 7:

1 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $1 - x = 2|x|$

2 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

a) $|x - 2| + 2x = 5$

b) $|2x + 1| + |x - 1| = 3x + 1$

الجواب :

1 – لدينا $1 - x = 2|x|$

الحالة 1 : $x \geqslant 0$

المعادلة تكافئ $1 - x = 2x$

تعني $1 = 3x$

تعني $x = \frac{1}{3}$

وبالتالي $S_1 = \{\frac{1}{3}\}$

الحالة 2 : $x \leqslant 0$

المعادلة تكافئ $1 - x = -2x$

تعني $1 = -2x + x$

تعني $1 = -x$

تعني $x = -1$

ومنه $S_2 = \{-1\}$

وبالتالي $S = S_1 \cup S_2$

$S = \{-1, \frac{1}{3}\}$

2 - a - نعتبر المعادلة : $|x - 2| + 2x = 5$

الحالة 1 : $x \geqslant 2$

المعادلة تكافئ $x - 2 + 2x = 5$

تكافئ $3x = 7$

تكافئ $x = \frac{7}{3}$

وحيث أن $\frac{7}{3} \geqslant 2$ فإن $S_1 = \{\frac{7}{3}\}$

الحالة 2 : $x \leqslant 2$

المعادلة تكافئ $- x + 2 + 2x = 5$

تكافئ $x = 3$

وحيث أن $3 > 2$ فإن $S_2 = \phi$

وبالتالي $S = \{\frac{7}{3}\}$

b - لدينا $|2x + 1| + |x - 1| = 3x + 1$

لدينا

x	$-\infty \quad \frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$\|2x + 1\|$	$-2x - 1$	$2x + 1$	$2x + 1$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\|2x + 1\|+\|x - 1\|$	$-3x$	$x + 2$	$3x$

الحالة 1 : في المجال $]-\infty , \frac{-1}{2}]$

المعادلة تكافئ $- 3x = 3x + 1$

تكافئ $- 6x = 1$

تكافئ $x = \frac{-1}{6}$

وحيث أن $\frac{-1}{6} \notin]-\infty , \frac{-1}{2}]$ فإن $S_1 = \phi$

الحالة 2 : في المجال $[\frac{-1}{2} , 1]$

المعادلة تكافئ $x + 2 = 3x + 1$

يعني $2x = 1$

يعني $x = \frac{1}{2} \in [\frac{-1}{2} , 1]$

إذن $S_2 = \{\frac{1}{2}\}$

الحالة 3 : في المجال $[1 , +\infty[$

المعادلة تكافئ $3x = 3x + 1$

يعني $0 = 1$ غير ممكن

إذن $S_3 = \phi$

الحل النهائي $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{\frac{1}{2}\}$

تمرين 8:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $1 \leqslant x \leqslant 4$

و $|y + 2| < 1$ اعط تأطيرا للأعداد التالية :

$x - y$ و xy و $2\sqrt{x} + 5$ و $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{x}{y}$

الجواب :

لدينا $|y + 2| < 1$ يعني $-1 < y + 2 < 1$

يعني $-3 < y < -1$

إذن $1 < -y < 3$

ولدينا $1 \leqslant x \leqslant 4$

إذن $\boxed{2 \leqslant x - y \leqslant 7}$

لدينا $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 < y < -1 \end{cases}$ و يعني $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 1 < -y < 3 \end{cases}$

إذن $1 < -xy < 12$

وبالتالي $\boxed{-12 \leqslant xy \leqslant -1}$

لدينا $1 \leqslant x \leqslant 4$ إذن $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$

ومنه $2 \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 4$

إذن $\boxed{7 \leqslant 2\sqrt{x} + 5 \leqslant 9}$

لدينا $1 \leqslant x \leqslant 4$ إذن $2 \leqslant x + 1 \leqslant 5$

ومنه $\boxed{\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{2}}$

لدينا $1 < -y < 3$ إذن $\frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1$

ولدينا $1 < x < 4$ إذن $\frac{1}{3} < -\frac{x}{y} < 4$

ومنه $\boxed{-4 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{3}}$

تمرين 9:

ليكن x عددا حقيقيا ينتمي إلى $[2, 3]$

1 – أ – تحقق أن: $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

ب – استنتج أن $-4 \leqslant x^2 - 4x \leqslant -3$

2 – بين أن : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leqslant 1$

ثم استنتج أن $\left|\frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}$

الجواب :

1 – أ – لدينا

$$(x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4$$
$$= x^2 - 4x$$

ومنه $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

ب – لدينا $2 \leqslant x \leqslant 3$ إذن $0 \leqslant x - 2 \leqslant 1$

ومنه $0 \leqslant (x - 2)^2 \leqslant 1$

$-4 \leqslant (x - 2)^2 - 4 \leqslant -3$

وبالتالي $-4 \leqslant x^2 - 4x \leqslant -3$

2 – لدينا $-4 \leqslant x^2 - 4x \leqslant -3$

يعني $1 \leqslant x^2 - 4x + 5 \leqslant 2$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leqslant 1}$

لدينا $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leqslant 1$

إذن $-\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4}$

وبالتالي $\left|\frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}$

تمرين 10:

a و b عددان حقيقيان حيث :

$|2a - 1| < 1$ و $1 < 4b^2 + a^2 + 1 < 4$

1 – اعط تأطيرا للعدد a

2 – بين أن $|b| < 1$

3 – أطر العدد $a \times b$

الجواب :

1– لدينا $|2a - 1| < 1$ يعني $-1 < 2a - 1 < 1$

يعني $0 < 2a < 2$

يعني $\boxed{0 < a < 1}$

2 – لدينا $1 < 4b^2 + a^2 + 1 < 4$ ①

ولدينا $0 < a < 1$ إذن $0 < a^2 < 1$

ومنه $-1 < -a^2 < 0$ ②

بجمع ① و ② نستنتج أن

$1-1 < 4b^2 + a^2 + 1 - a^2 < 4 + 0$

إذن $0 < 4b^2 + 1 < 4$

أي $-1 < 4b^2 < 3$

إذن $-\frac{1}{4} < b^2 < \frac{3}{4}$

ومنه $0 \leqslant b^2 \leqslant \frac{3}{4} < 1$

ومنه $|b| < 1$

3 – لدينا $|b| < 1$ يعني $0 \leqslant b < 1$

أو $-1 < b \leqslant 0$

الحالة 1 : $0 \leqslant b \leqslant 1$

ولدينا $0 < a < 1$ إذن $0 \leqslant ab < 1$

الحالة 2 : $-1 < b \leqslant 0$ أي $0 \leqslant -b < 1$

ولدينا $0 < a < 1$ إذن $0 \leqslant -ab < 1$

أي $-1 < ab \leqslant 0$

وبالتالي $-1 < ab < 1$

تمرين 11:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث :

$|a| < 1$ و $|b + \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$

1 – بين أن : $-2 < b < -1$

2 – اعط تأطيرا لـــ ab^2 و $\frac{2b}{a-2}$

3 – ليكن العدد A بحيث :

$A = -b^2 + b + ab - a$

a – بين أن : $A = (a - b)(b - 1)$

b – اعط تأطيرا للعدد A سعته 9

الجواب :

1 – لدينا $|b + \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{2} < b + \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

يعني $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} < b < \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

يعني $\boxed{-2 < b < -1}$

2 – لدينا $|a| < 1$ يعني $-1 < a < 1$

يعني $0 \leqslant a < 1$ أو $-1 < a \leqslant 0$

ولدينا $-2 < b < -1$ يعني $1 < -b < 2$

إذن $1 < b^2 < 4$

الحالة 1 : $0 \leqslant a < 1$

و $1 < b^2 < 4$ إذن $\boxed{0 \leqslant ab^2 < 4}$

الحالة 2 : $-1 < a \leqslant 0$ أي $0 \leqslant -a < 1$

ولدينا $1 < b^2 < 4$

ومنه $0 \leqslant -ab^2 < 4$ أي $-4 < ab^2 \leqslant 0$

وبالتالي $\boxed{-4 < ab^2 < 4}$

لدينا $-2 < b < -1$ إذن $2 < -2b < 4$

ولدينا $-1 < a < -1$ إذن $-3 < a - 2 < -1$

ومنه $-1 < \frac{1}{a-2} < -\frac{1}{3}$

أي $\frac{1}{3} < \frac{-1}{a-2} < 1$

وحيث أن $2 < -2b < 4$

فإن $\boxed{\frac{2}{3} < \frac{2b}{a-2} < 4}$

3 – a – لدينا $A = -b^2 + b + ab - a$

$= -b(b-1) + a(b-1)$

$= (b-1)(-b+a)$

وبالتالي $A = (a-b)(b-1)$

b – لدينا $-2 < b < -1$ إذن $-3 < b - 1 < -2$

أي $2 < -(b-1) < 3$

ولدينا $-1 < a < 1$

و $1 < -b < 2$ إذن $0 < a - b < 3$

ومنه $0 < -(b-1)(a-b) < 9$

أي $-9 < (b-1)(a-b) < 0$

إذن $-9 < A < 0$

وهذا تأطير للعدد A سعته 9

تمرين 12:

a و b عددان حقيقيان $1 < a < 3$

و $|a + b - 2| < 1$

1 – بين أن $|b| < 2$

2 – أ – أطر العدد $a + b$

ب – استنتج قيمة العدد

$A = |a + b - 5| + |a + b + 1|$

الجواب :

1 – لدينا $|a + b - 2| < 1$

يعني $-1 < a + b - 2 < 1$

يعني $1 < a + b < 3$ ①

ونعلم أن $1 < a < 3$

أي $-3 < -a < -1$ ②

بجمع المتفاوتتين ① و ② نحصل على :

$-2 < b < 2$ أي $|b| < 2$

2 – أ – لدينا $|b| < 2$ أي $-2 < b < 2$

ولدينا $1 < a < 3$

إذن $-1 < a + b < 5$

ب – لدينا $-1 < a + b$ أي $a + b + 1 > 0$

إذن $|a + b + 1| = a + b + 1$

ولدينا $a + b < 5$ إذن $a + b - 5 < 0$

إذن $|a + b - 5| = -a - b + 5$

وبالتالي $A = |a + b - 5| + |a + b + 1|$

$= -a - b + 5 + a - b + 1$

إذن $A = 6$

تمرين 13:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث :

$x \geqslant \frac{1}{3}$ و $y \leqslant 2$ و $x - y = 2$

1 – أحسب قيمة العدد E بحيث

$E = \sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(3y-6)^2}$

2 – أ – تحقق أن $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4$ و $\frac{-5}{3} \leqslant y \leqslant 2$

ب – أحسب قيمة F حيث :

$F = |x + y - 6| + |x + y + \frac{4}{3}|$

الجواب :

1 – لدينا $E = \sqrt{(3x - 1)^2} + \sqrt{(3y - 6)^2}$

$= |3x - 1| + |3y - 6|$

$= 3x - 1 - (3y - 6)$ لأن $\begin{cases} 3x - 1 \geqslant 0 \\ 3y - 6 \leqslant 0 \end{cases}$

$= 3x - 1 - 3y + 6$

$= 3(x - y) + 5$

$= 3\times 2 + 5$

إذن $E = 11$

2 – أ – لنتحقق أن $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4$ و $\frac{-5}{3} \leqslant y \leqslant 2$

لدينا $\frac{1}{3} \leqslant x$

ولدينا $x - y = 2$ إذن $x = y + 2$

ونعلم أن $y \leqslant 2$ إذن $y + 2 \leqslant 4$ أي $x \leqslant 4$

وبالتالي $\boxed{\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4}$

لدينا $y \leqslant 2$

ونعلم أن $\frac{1}{3} \leqslant x$ و $x = y + 2$

إذن $\frac{1}{3} \leqslant y + 2$ أي $\frac{1}{3} - 2 \leqslant y$

يعني $y + 2 \leqslant 4$

وبالتالي $\boxed{-\frac{5}{3} \leqslant y \leqslant 2}$

ب – لدينا $\begin{cases} \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4 \\ -\frac{5}{3} \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$ إذن $-\frac{4}{3} \leqslant x + y \leqslant 6$

ومنه $x + y - 6 \leqslant 0$ و $x + y + \frac{4}{3} \geqslant 0$

إذن $F = |x + y - 6| + |x + y + \frac{4}{3}|$

$= -x - y + 6 + x + y + \frac{4}{3}$

ومنه $F = \frac{22}{3}$

تمرين 14:

نعتبر العدد الحقيقي $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$

1 – بين أن : $A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

2 – إذا علمت أن :

$2,6 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,7$ و $1,7 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,8$

فاعط تأطيرا للعدد A

الجواب :

1 – لدينا :

$(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{7})^2 - 12\sqrt{21} + (3\sqrt{3})^2$

$= 28 - 12\sqrt{21} + 27$

$= 55 - 12\sqrt{21}$

وبالتالي $A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

2 – لدينا $\begin{cases} 2,6 < \sqrt{7} < 2,7 \\ 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \end{cases}$

إذن $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

$-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$

ومنه $5,2 - 5,4 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 5,4 - 5,1$

وبالتالي $-0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$

تمرين 15:

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $2x^2 - 8 \leqslant 0$

و $|y - 1,25| \leqslant 25.10^{-2}$

1 – بين أن : $-2 \leqslant x \leqslant 2$

$1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

2 – حدد تأطيرا لكل من العددين $x^2 - y$ و xy

الجواب :

1 – لدينا $2x^2 - 8 \leqslant 0$ يعني $x^2 \leqslant \frac{8}{2}$

يعني $x^2 \leqslant 4$

يعني $|x| \leqslant 2$

يعني $-2 \leqslant x \leqslant 2$

لدينا $|y - 1,25| \leqslant 25.10^{-2}$

يعني $-25.10^{-2} < y - 1,25 < 25.10^{-2}$

$-25.10^{-2} + 1,25 < y < 1,25 + 25.10^{-2}$

يعني $-0,25 + 1,25 \leqslant y \leqslant 1,25 + 0,25$

يعني $1 \leqslant y \leqslant 1,5$

أي $\boxed{1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}}$

2 – لدينا $-2 \leqslant x \leqslant 2$

يعني $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$

و $1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

يعني $-\frac{3}{2} \leqslant -y \leqslant -1$

ومنه $0 - \frac{3}{2} \leqslant x^2 - y \leqslant 2 - 1$

أي $\boxed{-\frac{3}{2} \leqslant x^2 - y \leqslant 1}$

لدينا $-2 \leqslant x \leqslant 2$ أي $0 \leqslant x \leqslant 2$

أو $-2 \leqslant x \leqslant 0$

الحالة 1 : $0 \leqslant x \leqslant 2$

ولدينا $1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

إذن $0 \leqslant xy \leqslant 3$

الحالة 2 : $-2 \leqslant x \leqslant 0$ أي $0 \leqslant -x \leqslant 2$

ولدينا $1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

إذن $0 \leqslant -xy \leqslant 3$

أي $-3 \leqslant xy \leqslant 0$

التأطير النهائي $\boxed{-3 \leqslant xy \leqslant 3}$

تمرين 16:

ليكن a من $\mathbb{R}$ نضع $E = 1 + \frac{3}{2}\left(a + \frac{a^2 - 2a}{6}\right)$

1 – بين أن : $E = \left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$

2 – نفترض أن : $-3 < a \leqslant -1$

بين أن : $\sqrt{E} \leqslant \frac{1}{2}$

3 – حدد قيمة a إذا علمت أن : $\sqrt{E} = \frac{1}{4}$

الجواب :

1 – لدينا $E = 1 + \frac{3}{2}a + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}$

$= 1 + a + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$

وبالتالي $E = \left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$

2 – لدينا $-3 < a \leqslant -1$

إذن $-\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{2}a \leqslant -\frac{1}{2}$

أي $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}a + 1 \leqslant \frac{1}{2}$

أي $\left|\frac{1}{2}a + 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$ ومنه $\sqrt{E} \leqslant \frac{1}{2}$

3 – لدينا $\sqrt{E} = \frac{1}{4}$ يعني $\left|\frac{1}{2}a + 1\right| = \frac{1}{4}$

يعني $\frac{1}{2}a+1=\frac{1}{4}$ أو $\frac{1}{2}a+1=-\frac{1}{4}$

يعني $\frac{1}{2}a=-\frac{3}{4}$ أو $\frac{1}{2}a=-\frac{5}{4}$

يعني $a=-\frac{3}{2}$ أو $a=-\frac{5}{2}$

تمرين 17:

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا

1 – بين أن : $0<\sqrt{a+b}-\sqrt{a}<\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

2 – استنتج مقارنة للعددين $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ و $\frac{\sqrt{5}}{5}$

اكاديمية تطوان 94

الجواب :

1 – لدينا $b>0$ إذن $a+b>a$

ومنه $\sqrt{a+b}>\sqrt{a}$

أي $0<\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$

لدينا $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=\frac{a+b-a}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$

$=\frac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}<\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$

إذن $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}<\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

وبالتالي $0<\sqrt{a+b}-\sqrt{a}<\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

2 – نضع $a=5$ و $b=2$

لدينا $a>0$ و $b>0$ إذن حسب السؤال 1

فإن $0<\sqrt{5+2}-\sqrt{2}<\frac{2\sqrt{5}}{2\times 5}$

وبالتالي $\sqrt{7}-\sqrt{2}<\frac{\sqrt{5}}{5}$

تمرين 18:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1 $1-\frac{2-x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$

(2 $\frac{3x+4}{5}-\frac{3}{2}<\frac{x-1}{3}$

(3 $\frac{3}{4}-\left[1-3\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]\geqslant\frac{2-x}{4}$

(4 $\frac{0,1x-1}{4}-\frac{4+x}{5}>\frac{1-0,3x}{2}$

الجواب :

(1 $1-\frac{2-x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$ يعني $\frac{3-2+x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$

يعني $\frac{1+x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$

يعني $4+4x\leqslant 6-3x$

يعني $4x+3x\leqslant 6-4$

يعني $7x\leqslant 2$

يعني $x\leqslant\frac{2}{7}$

وبالتالي $S=\left]-\infty,\frac{2}{7}\right]$

(2 لدينا $\frac{3x+4}{5}-\frac{3}{2}<\frac{x-1}{3}$

يعني $\frac{6x+8-15}{10}<\frac{x-1}{3}$

يعني $\frac{6x-7}{10}<\frac{x-1}{3}$

يعني $3(6x-7)<10(x-1)$

يعني $18x-21<10x-10$

يعني $18x-10x<21-10$

يعني $8x<11$

يعني $x < \frac{11}{8}$

وبالتالي $S = \left]-\infty , \frac{11}{8}\right[$

3) لدينا $\frac{3}{4} - \left[1 - 3\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] \geqslant \frac{2-x}{4}$

يعني $\frac{3}{4} - 1 + 3\left(\frac{x+1}{2}\right) \geqslant \frac{x}{3}$

يعني $-\frac{1}{4} + 3\left(\frac{x+1}{2}\right) \geqslant \frac{x}{3}$

يعني $-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{3}x$

يعني $\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x \geqslant -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

يعني $\frac{7}{6}x \geqslant -\frac{5}{4}$

يعني $x \geqslant \frac{6}{7} \times \frac{-5}{4}$

يعني $x \geqslant \frac{-15}{14}$

وبالتالي $S = \left[\frac{-15}{14} , +\infty\right[$

4) لدينا $\frac{0,1x-1}{4} - \frac{4+x}{5} > \frac{1-0,3x}{2}$

يعني $\frac{0,5x - 5 - 16 - 4x}{20} > \frac{1-0,3x}{2}$

يعني $\frac{-3,5x-21}{20} > \frac{10-3x}{20}$

يعني $-3,5x - 21 > 10 - 3x$

يعني $-3,5x + 3x > 21 + 10$

يعني $-0,5x > 31$

يعني $x < \frac{-31}{0,5}$

يعني $x < -62$

وبالتالي $S = \left]-\infty , -62\right[$

تمرين 19:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

1) $x + \frac{2x-1}{3} + \frac{5}{2} \geqslant \frac{5x+7}{3}$

2) $8 - 2[1 - (x+2)] \leqslant 10 + 2x$

3) $-3x + 4 > 9x + 24 - 4[2 + 3(x+1)]$

الجواب :

1) لدينا $x + \frac{2x-1}{3} + \frac{5}{2} \geqslant \frac{5x+7}{3}$

(نضرب الطرفين في 6)

يعني $6x + 4x - 2 + 15 \geqslant 10x + 14$

يعني $10x - 10x \geqslant 14 - 13$

يعني $0 \geqslant 1$ وهذا غير ممكن

إذن $S = \phi$

2) لدينا $8 - 2[1 - (x+2)] \leqslant 10 + 2x$

يعني $8 - 2 + 2x + 4 \leqslant 10 + 2x$

يعني $10 + 2x \leqslant 10 + 2x$

يعني $0 \leqslant 0$ وهذا دائما صحيح

وبالتالي $S = \mathbb{R}$

3) لدينا $-3x + 4 > 9x + 24 - 4[2 + 3(x+1)]$

يعني $-3x + 4 > 9x + 24 - 8 - 12x - 12$

يعني $-3x - 9x + 12x > 4 - 4$

يعني $0 > 0$ وهذا غير صحيح

وبالتالي $S = \phi$

تمرين 20:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1 $\dfrac{2}{x+4} \geqslant 3$

(2 $\dfrac{3x-2}{x+2} < 3$

(3 $\dfrac{2}{x-2} \geqslant \dfrac{1}{x+2}$

(4 $|2x-3| \geqslant |x+1|$

الجواب :

(1 لدينا $\dfrac{2}{x+4} \geqslant 3$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x+4 \neq 0$

يعني $x \neq -4$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-4\}$

المتراجحة تكافئ $\dfrac{2}{x+4} - 3 \geqslant 0$

يعني $\dfrac{2-3x-12}{x+4} \geqslant 0$

يعني $\dfrac{-3x-10}{x+4} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{10}{3}$		$+\infty$
$-3x-10$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x-10}{x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

وبالتالي $S = \left]-4, -\frac{10}{3}\right]$

(2 لدينا $\dfrac{3x-2}{x+2} < 3$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x+2 \neq 0$

يعني $x \neq -2$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

المتراجحة تكافئ $\dfrac{3x-2}{x+2} < 3$

يعني $\dfrac{3x-2-3x-6}{x+2} < 0$

يعني $\dfrac{-8}{x+2} < 0$

يعني $x+2 > 0$

يعني $x > -2$

وبالتالي $S =]-2, +\infty[$

(3 لدينا $\dfrac{2}{x-2} \geqslant \dfrac{1}{x+2}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x-2 \neq 0$ و $x+2 \neq 0$

يعني $x \neq 2$ و $x \neq -2$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

المتراجحة تكافئ $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} \geqslant 0$

يعني $\dfrac{2x+4-x+2}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0$

يعني $\dfrac{x+6}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$		-6		-2		2		$+\infty$
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+6}{(x-2)(x+2)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

وبالتالي : $S = [-6, -2[\cup]2, +\infty[$

4) لدينا $|2x-3| \geqslant |x+1|$

يعني $|2x-3| - |x+1| \geqslant 0$

لدينا

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ ... $+\infty$
$\|2x-3\|$	$-2x+3$	$-2x+3$	$2x-3$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|2x-3\| - \|x+1\|$	$-x+4$	$-3x+2$	$x-4$

في المجال $]-\infty, -1]$

المتراجحة تكافئ $-x+4 \geqslant 0$

يعني $-x \geqslant -4$

يعني $x \leqslant 4$

ومنه $S_1 =]-\infty, 4] \cap]-\infty, -1]$

$=]-\infty, -1]$

في المجال $[-1, \frac{3}{2}]$

المتراجحة تكافئ $-3x+2 \geqslant 0$

يعني $-3x \geqslant -2$

يعني $x \leqslant \frac{2}{3}$

إذن $S_2 =]-\infty, \frac{2}{3}] \cap [-1, \frac{3}{2}]$

$= [-1, \frac{2}{3}]$

في المجال $[\frac{3}{2}, +\infty[$

المتراجحة تكافئ $x-4 \geqslant 0$

تعني $x \geqslant 4$

وبالتالي $S_3 = [\frac{3}{2}, +\infty[\cap [4, +\infty[$

$= [4, +\infty[$

الحل في $\mathbb{R}$ هو : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$=]-\infty, -1] \cup [-1, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$

$S =]-\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$

تمرين 21:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$

2) $\frac{3x+1}{x-2} < 2$

3) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \leqslant 0$

4) $\frac{1}{x+3} \geqslant \frac{2}{x+1}$

5) $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{x-1}$

الجواب :

1) لدينا $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$

مجموعة التعريف $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{1}{x+2} - 1 \leqslant 0$

يعني $\frac{1-x-2}{x+2} \leqslant 0$

يعني $\frac{-x-1}{x+2} \leqslant 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$ ... -2	-2 ... -1	-1 ... $+\infty$
$-x-1$	+	+	-
$x+2$	-	+	+
$\frac{-x-1}{x+2}$	-	+	-

وبالتالي $S =]-\infty , -2[\cup [-1 , +\infty[$

2) لدينا $\frac{3x+1}{x-2} < 2$

مجموعة التعريف D : $D = \mathbb{R} - \{2\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{3x+1}{x-2} - 2 < 0$

يعني $\frac{3x+1-2x+4}{x-2} < 0$

يعني $\frac{x+5}{x-2} < 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+5}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

وبالتالي $S =]-5 , 2[$

3) لدينا $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \leqslant 0$

يعني $x^2(x+3) - 2(x+3) \leqslant 0$

يعني $(x+3)(x^2-2) \leqslant 0$

يعني $(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leqslant 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$S =]-\infty , -3] \cup [-\sqrt{2} , \sqrt{2}]$

4) لدينا $\frac{1}{x+3} \geqslant \frac{2}{x+1}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x+3 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$

يعني $x \neq -3$ و $x \neq -1$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-1 , -3\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1} \leqslant 0$

يعني $\frac{x+1-2x-6}{(x+3)(x+1)} \leqslant 0$

يعني $\frac{-x-5}{(x+3)(x+1)} \leqslant 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x-5}{(x+3)(x+1)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

ومنه مجموعة الحلول هي :

$S = [-5 , -3[\cup]-1 , +\infty[$

5) لدينا $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{x-1}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x-1 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$ و $x^2-1 \neq 0$

يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$ و $x \neq 1$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-1 , 1\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{x-1}$

يعني $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$

يعني $\frac{4+x(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{4+x^2-x-x^2-2x-1}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3x+3}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3}{x+1} \geqslant 0$

يعني $x+1<0$

يعني $x<-1$

وبالتالي $S =]-\infty, -1[$

تمرين 22:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\frac{x-1}{2x+3} < \frac{x+3}{2x-1}$

2) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-1}$

3) $x-3 < \sqrt{x^2+1}$

الجواب :

1) مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $2x-1 \neq 0$ و $2x+3 \neq 0$

يعني $x \neq \frac{1}{2}$ و $x \neq -\frac{3}{2}$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{x-1}{2x+3} - \frac{x+3}{2x-1} < 0$

يعني $\frac{(x-1)(2x-1)-(x+3)(2x+3)}{(x+3)(x+1)} < 0$

يعني $\frac{2x^2-x-2x+1-2x^2-3x-6x-9}{(x+3)(x+1)} < 0$

يعني $\frac{-12x-8}{(2x+3)(2x-1)} < 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-12x-8$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-12x-8}{(2x+3)(2x+1)}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$

ومنه مجموعة الحلول هي :

$$S =]-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

2) لدينا $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x-1 \geqslant 0$ و $2x-3 \geqslant 0$

يعني $x \geqslant 1$ و $x \geqslant \frac{3}{2}$

ومنه $D = [\frac{3}{2}, +\infty[$

المتراجحة تكافئ $(\sqrt{x-1})^2 < (\sqrt{2x-3})^2$

يعني $x-1 < 2x-3$

يعني $x-2x < 1-3$

يعني $-x < -2$

يعني $x > 2$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S = [-\frac{3}{2}, +\infty[\cap]2, +\infty[$$

$$S =]2, +\infty[$$

3) لدينا $x-3 < \sqrt{x^2+1}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x^2 + 1 \geqslant 0$ وهذا دائما صحيح

ومنه $D = \mathbb{R}$

إذا كان $x \leqslant 3$ فإن $x - 3 \leqslant 0$

ويكون لدينا $x - 3 < \sqrt{x^2+1}$ لكل $x \leqslant 3$

إذن $S_1 =]-\infty, 3[$

إذا كان $x \geqslant 3$

فإن $x - 3 < \sqrt{x^2+1}$ تكافئ $(x-3)^2 < x^2 + 1$

يعني $x^2 - 6x + 9 < x^2 + 1$

يعني $-6x < -8$

يعني $6x > 8$

يعني $x > \frac{8}{6}$

يعني $x > \frac{4}{3}$

ومنه $S_2 =]\frac{4}{3}, +\infty[\cap [3, +\infty[$

$= [3, +\infty[$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2$

$=]+\infty, 3[\cap [3, +\infty[$

إذن $S = \mathbb{R}$

تمرين 23:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

1) $|x-2| \geqslant x$

2) $1 - x < |x|$

3) $|x+1| - |x| \geqslant 0$

الجواب :

1) لدينا $|x-2| \geqslant x$

إذا كانت $x \geqslant 2$ المتراجحة تكافئ $x - 2 \geqslant x$

يعني $-2 \geqslant 0$

وهذا غير ممكن ومنه $S_1 = \phi$

إذا كانت $x \leqslant 2$ المتراجحة تكافئ $-x + 2 \geqslant x$

يعني $-2x \geqslant -2$

يعني $x \leqslant 1$

وبالتالي $S_2 =]-\infty, 1] \cap]-\infty, 2]$

$=]-\infty, 1]$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2$

$=]-\infty, 1]$

2) لدينا $1 - x < |x|$

الحالة 1 : $x \geqslant 0$ إذن $|x| = x$

المتراجحة تكافئ $1 - x < x$

يعني $1 < 2x$

يعني $x > \frac{1}{2}$

ومنه $S_1 =]\frac{1}{2}, +\infty[\cap [0, +\infty[$

$=]\frac{1}{2}, +\infty[$

الحالة 2 : $x \geqslant 0$ إذن $|x| = -x$

المتراجحة تكافئ $1 - x < -x$

يعني $1 < 0$ وهذا غير ممكن

ومنه $S_2 = \Phi$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2$

$= \left] \frac{1}{2} , +\infty \right[$

3) لدينا $|x+1| - |x| \geqslant 0$

x	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 0$	$0 \quad +\infty$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x
$\|x+1\| - \|x\|$	-1	$2x+1$	1

في المجال $\left] -\infty , -1 \right[$

المتراجحة تكافئ $-1 \geqslant 0$ غير ممكن

إذن $S_1 = \phi$

في المجال $\left[-1 , 0 \right]$

المتراجحة تكافئ $2x + 1 \geqslant 0$

يعني $2x \geqslant -1$

يعني $x \geqslant -\frac{1}{2}$

وبالتالي $S_2 = \left[-\frac{1}{2} , +\infty \right[\cap \left[-1 , 0 \right]$

$= \left[-\frac{1}{2} , 0 \right]$

في المجال $\left[0 , +\infty \right[$

المتراجحة تكافئ $1 \geqslant 0$ وهذا صحيح لكل $x \in \left[0 , +\infty \right[$

إذن $S_3 = \left[0 , +\infty \right[$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$= \phi \cup \left[-\frac{2}{3} , 0 \right] \cup \left[0 , +\infty \right[$

$S = \left[-\frac{2}{3} , +\infty \right[$

تمرين 24:

حل وناقش في $\mathbb{R}$ حسب قيم البارامتر الحقيقي m.

1) $mx - 2 \geqslant 0$

2) $2(m - x) \geqslant m(1 - x)$

الجواب :

1) لدينا $mx - 2 \geqslant 0$ يعني $mx \geqslant 2$

الحالة 1 : $m = 0$ المتراجحة تكافئ $0 \geqslant 2$ غير ممكن في هذه الحالة $S = \phi$

الحالة 2 : $m > 0$

المتراجحة تكافئ $x \geqslant \frac{2}{m}$

في هذه الحالة : $S = \left[\frac{2}{m} , +\infty \right[$

الحالة 3 : $m < 0$

المتراجحة تكافئ $mx \geqslant 2$

يعني $x \leqslant \frac{2}{m}$

في هذه الحالة $S = \left] -\infty , \frac{2}{m} \right[$

2) لدينا $2(m - x) \geqslant m(1 - x)$

يعني $2m - 2x \geqslant m - mx$

يعني $-2x + mx \geqslant m - 2m$

يعني $(m - 2)x \geqslant -m$

الحالة 1 : $m = 2$

المتراجحة تكافئ $0 \geqslant -2$ وهذا دائما صحيح

الحل في هذه الحالة $S = \mathbb{R}$

الحالة 2 : $m > 2$ أي $m - 2 > 0$

المتراجحة تكافئ $(m-2)x \geqslant -m$

يعني $x \geqslant \frac{-m}{m-2}$

يعني $x \geqslant \frac{m}{2-m}$

وبالتالي $S = \left] \frac{m}{2-m}, +\infty \right[$

الحالة 3 : $m < 2$ أي $m-2 < 0$

المتراجحة تكافئ $(m-2)x \geqslant -m$

يعني $x \leqslant \frac{-m}{m-2}$

يعني $x \leqslant \frac{m}{2-m}$

وبالتالي $S = \left] -\infty, \frac{m}{2-m} \right[$

تمرين 25:

1) بين أن 0,4 تقريب للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 10^{-1}

2) بين أن 0,14 تقريب للعدد $\frac{1}{7}$ إلى 5×10^{-3}

3) بين أن 1,16 تقريب للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 10^{-2}

الجواب :

1) لنبين أن $\left|\frac{1}{3} - 0,4\right| < 10^{-1}$

لدينا $\left|\frac{1}{3} - 0,4\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{4}{10}\right|$

$= \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right|$

$= \left|\frac{5-6}{15}\right|$

$= \frac{1}{15}$

لدينا $15 > 10$

إذن $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$

أي أن $\left|\frac{1}{3} - 0,4\right| < 10^{-1}$

ومنه 0,4 تقريب للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 10^{-1}

2) لنبين أن $\left|\frac{1}{7} - 0,14\right| < 5 \times 10^{-3}$

لدينا $\left|\frac{1}{7} - 0,14\right| = \left|\frac{1}{7} - \frac{14}{100}\right|$

$= \left|\frac{1}{7} - \frac{7}{50}\right|$

$= \left|\frac{50-49}{350}\right|$

$= \frac{1}{350}$

لدينا $350 > 200$

إذن $\frac{1}{350} < \frac{1}{200}$

ومنه $\frac{1}{350} < 5 \times 10^{-3}$

إذن $\left|\frac{1}{7} - 0,14\right| < 5 \times 10^{-3}$

إذن 0,14 تقريب للعدد $\frac{1}{7}$ إلى 5×10^{-3}

3) لنبين أن $\left|\frac{7}{6} - 1,16\right| < 10^{-2}$

لدينا $\left|\frac{7}{6} - 1,16\right| = \left|\frac{7}{6} - \frac{116}{100}\right|$

$= \left|\frac{7}{6} - \frac{29}{25}\right|$

$= \left|\frac{175-174}{150}\right|$

$= \frac{1}{150}$

لدينا $150 > 100$

إذن $\frac{1}{150} < \frac{1}{100}$

أي أن $\frac{1}{150} < 10^{-2}$

ومنه $\left|\frac{7}{6} - 1,16\right| < 10^{-2}$

إذن العدد 1,16 تقريب للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 10^{-2}

تمرين 26:

1) اعط تقريبا بإفراط للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 8×10^{-2}

2) اعط تقريبا بتفريط للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 5×10^{-4}

3) ليكن $a<x<b$

بين أن $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$.

الجواب :

1) لدينا $\frac{1}{3}\simeq 0{,}333.........$

إذن $0{,}33<\frac{1}{3}<0{,}41$

ومنه العدد $0{,}41$ تقريب بإفراط للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 8×10^{-2}

2) لدينا $\frac{7}{6}\simeq 1{,}6666.........$

إذن $1{,}6666<\frac{7}{6}<1{,}6671$

إذن العدد $1{,}6666$ تقريب بتفريط للعدد $\frac{7}{6}$

إلى 5×10^{-4}

3) لدينا $a<x<b$

إذن $a-\frac{a+b}{2}<x-\frac{a+b}{2}<b-\frac{a+b}{2}$

$\frac{2a-a-b}{2}<x-\frac{a+b}{2}<\frac{2b-a-b}{2}$

أي أن $\frac{a-b}{2}<x-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{2}$

أي أن $-(\frac{b-a}{2})<x-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{2}$

إذن $\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$

إذن العدد $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$.

تمرين 27:

ليكن x تقريب للعدد $\frac{2}{3}$ إلى 2×10^{-1}

1) بين أن $\frac{7}{15}<x<\frac{13}{15}$

2) حدد تأطيرا للعدد $\frac{x}{x-1}$

الجواب :

1) x تقريب للعدد $\frac{2}{3}$ إلى 2×10^{-1}

تعني أن $|\frac{2}{3}-x|<2\times10^{-1}$

أي أن $-2\times10^{-1}<\frac{2}{3}-x<2\times10^{-1}$

أي أن $-\frac{1}{5}<\frac{2}{3}-x<\frac{1}{5}$

اذن $-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}<-x<\frac{1}{5}-\frac{2}{3}$

اذن $\frac{-13}{15}<-x<\frac{-7}{15}$

أي أن $\frac{7}{15}<x<\frac{13}{15}$

2) لدينا $\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}$

$=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}$

$=1+\frac{1}{x-1}$

لدينا $\frac{7}{15}<x<\frac{13}{15}$

أي أن $\frac{7}{15}-1<x-1<\frac{13}{15}-1$

أي أن $\frac{-8}{15}<x-1<\frac{-2}{15}$

اذن $\frac{-15}{2}<\frac{1}{x-1}<\frac{-15}{8}$

ومنه $1-\frac{15}{2}<1+\frac{1}{x-1}<1-\frac{15}{8}$

ومنه $\frac{-13}{2} < \frac{x}{x-1} < \frac{-7}{8}$

تمرين 28:

نعتبر : 1 قيمة مقربة للعدد a إلى $\frac{3}{2}$

-1 قيمة مقربة للعدد b إلى $\frac{2}{3}$

1) أطر العددين a و b

2) أطر العددين a +b و $\frac{a}{b}$

الجواب :

1) لدينا 1 قيمة مقربة للعدد a إلى $\frac{3}{2}$

أي أن $|a - 1| < \frac{3}{2}$

أي أن $\frac{-3}{2} < a - 1 < \frac{3}{2}$

$\frac{-3}{2} + 1 < a < \frac{3}{2} + 1$

ومنه $\frac{-1}{2} < a < +\frac{5}{2}$

لدينا -1 قيمة مقربة للعدد b إلى $\frac{2}{3}$

أي أن $|b + 1| < \frac{2}{3}$

إذن $\frac{-2}{3} < b + 1 < \frac{2}{3}$

أي أن $\frac{-2}{3} - 1 < b < \frac{2}{3} - 1$

$\frac{-5}{3} < b < \frac{-1}{3}$

2) لدينا $\frac{-1}{2} < a < \frac{5}{2}$

$\frac{-5}{3} < b < \frac{-1}{3}$

إذن $\frac{-1}{2} - \frac{5}{3} < a + b < \frac{5}{2} - \frac{1}{3}$

إذن $\frac{-13}{6} < a + b < \frac{13}{6}$

لدينا $\frac{-5}{3} < b < \frac{-1}{3}$

إذن $-3 < \frac{1}{b} < \frac{-3}{5}$

و $\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$

ولدينا $\frac{-1}{2} < a < \frac{5}{2}$

إذن $0 \leq a < \frac{5}{2}$ أو $\frac{-1}{2} < a \leq 0$

لدينا $\begin{cases} 0 \leq a < \frac{5}{2} \\ \frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3 \end{cases}$ إذن $0 \leq -\frac{a}{b} < \frac{15}{2}$

إذن $\frac{-15}{2} < \frac{a}{b} \leq 0$

لدينا $\frac{-1}{2} < a \leq 0$ و $\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$

إذن $0 \leq -a < \frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$

إذن $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

لدينا $\frac{-15}{2} < \frac{a}{b} \leq 0$ أو $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

اذن $\frac{-15}{2} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

تمرين 29:

1) قارن العددين $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$

2) احسب $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

3) نضع $X = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$ بسط X

4) علما أن $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

حدد تقريب للعدد x إلى 0,3

الجواب :

1) لدينا $(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$

$(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$

إذن $(2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$

ومنه $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

2) لدينا $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

$= (3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2(3\sqrt{3})\times(2\sqrt{7})$

$= 27 + 28 - 12\sqrt{21}$

$= 55 - 12\sqrt{21}$

إذن $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = 55 - 12\sqrt{21}$

3) لدينا $= \sqrt{(55 - 12\sqrt{21})}$

$= \sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2}$

$= |3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}|$

$= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

لأن $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}|$

اذن $X = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

4) لدينا $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

اذن $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

اذن $- 5,4 < - 3\sqrt{3} < - 5,1$

ومنه $- 0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$

ومنه $- 0,3 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} - 0,1 < - 0,2$

اذن $- 0,3 < X - 0,1 < 0,2 < 0,3$

اذن $- 0,3 < X - 0,1 < 0,3$

أي أن $|X - 0,1| < 0,3$

اذن 0,1 تقريب للعدد X إلى 0,3

تمرين 30:

إذا علمت أن :

2,645 تقريب للعدد $\sqrt{7}$ إلى 5×10^{-3}

1,415 تقريب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 5×10^{-3}

اعط تقريبا للعدد $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ إلى الدقة 10^{-2}

الجواب :

لدينا 2,645 تقريب للعدد $\sqrt{7}$ إلى 5×10^{-3}

اذن $|\sqrt{7} - 2,645| < 0,005$

أي أن $- 0,005 < \sqrt{7} - 2,645 < 0,005$

اذن $+ 2,64 < \sqrt{7} < + 2,65$

لدينا 1,415 تقريب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 5×10^{-3}

اذن $|\sqrt{2} - 1,415| < 0,005$

أي أن $- 0,005 < \sqrt{2} - 1,415 < 0,005$

اذن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

ومنه $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$

اذن $2,64 + (-1,42) < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 2,65 + (-1,41)$

$1,22 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 1,42$

لدينا $\frac{1,22 + 1,24}{2} = 1,23$

اذن $- 0,01 < (\sqrt{7} - \sqrt{2}) - 1,23 < 0,01$

اذن $|\sqrt{7} - \sqrt{2} - 1,23| < 0,01$

اذن $|\sqrt{7}-\sqrt{2}-1,23|<10^{-2}$

أي أن $1,23$ تقريبا للعدد $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ إلى 10^{-2}

تمرين 31:

ليكن x من $\mathbb{R}$ نضع $B=2x-2$

و $A=x^2-2x+2$

1) تحقق من أن $|A-B|=(x-2)^2$

2) نفترض أن x ينتمي إلى المجال $[1,9\,;\,2,1]$.

أ - أطر العدد $x-2$

ب - استنتج أن B تقريب للعدد A إلى 10^{-2}

الجواب :

1) لدينا $|A-B|=|x^2-2x+2-2x+2|$

$=|x^2-4x+4|$

$=|(x-2)^2|$

$=(x-2)^2$

إذن $|A-B|=(x-2)^2$

2) أ - لدينا $x\in[1,9\,;2,1]$

إذن $1,9<x<2,1$

ومنه $-0,1<x-2<0,1$

ب - لدينا $-0,1<x-2<0,1$

ومنه $0<(x-2)^2<0,01$

إذن $(x-2)^2<0,01$

أي أن $|A-B|<10^{-2}$

إذن B تقريب للعدد A إلى 10^{-2}

تمرين 32:

1) أ - بين أن لكل $a>0$; $\sqrt{a+5}<\sqrt{a}+\sqrt{5}$

ب - استنتج أن :

لكل a من المجال $]0,5[$

$0<(\sqrt{5}-\sqrt{a})<\frac{5-a}{\sqrt{5+a}}$

ليكن x من المجال $]4,5[$ بين أن $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{x}$ إلى 2×10^{-2}

الجواب :

1) أ - لدينا $(\sqrt{a+5})^2=a+5$

$(\sqrt{a}+\sqrt{5})^2=5+a+2\sqrt{a}.\sqrt{5}$

إذن $(\sqrt{a+5})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{5})^2$

ومنه $\sqrt{a+5}<(\sqrt{a}+\sqrt{5})$

لأن $\sqrt{a}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{a+5}$ موجبان

ب - لدينا $0<a<5$

إذن $0<\sqrt{a}<\sqrt{5}$

اذن $\sqrt{a}<\sqrt{5}$ ومنه $\sqrt{5}-\sqrt{a}>0$ ①

لدينا $\sqrt{5}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{a})(\sqrt{5}+\sqrt{a})}{\sqrt{5}+\sqrt{a}}$

$=\frac{5-a}{\sqrt{5}+\sqrt{a}}$

بما أن $\sqrt{a+5}<\sqrt{a}+\sqrt{5}$

فإن $\frac{1}{\sqrt{a+5}}>\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$

وبما أن $5-a>0$

فإن $\frac{5-a}{\sqrt{a}+5} > \frac{5-a}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$

إذن $\frac{5-a}{\sqrt{a}+5} > \sqrt{5}-\sqrt{a}$

أي أن $\sqrt{5}-\sqrt{a} < \frac{5-a}{\sqrt{a}+5}$ ②

من ① و② نستنتج أن :

$$0 < \sqrt{5}-\sqrt{a} < \frac{5-a}{\sqrt{a}+5}$$

2) لدينا $4 < x < 5$

إذن $2 < \sqrt{x} < \sqrt{5}$

أي أن $2-\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < \sqrt{x}-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right) < \sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}-1$

$$1-\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{x}-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right) < \frac{\sqrt{5}}{2}-1$$

$$\left|\sqrt{x}-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right| < \frac{\sqrt{5}-2}{2}$$

حسب ① ب لدينا : نأخذ $a = 4$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{2} < \frac{5-4}{2\times\sqrt{5}+4}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < 2\times10^{-2}$$

$$\left|\sqrt{x}-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right| < 2\times10^{-2}$$

إذن $\frac{\sqrt{5}}{2}+1$ تقريب للعدد $\sqrt{x}$ إلى 2×10^{-2}