الجذع مشترك علمي

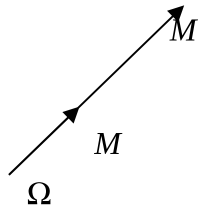
ملخص درس التحويلات الاعتيادية في المستوى

الأستاذ : عثماني نجيب

I) التحـــــاكـــي

A) تعريف

لتكن Ω نقطة و k عدد حقيقي غير منعدم .
التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هو التطبيق
الذي نرمز له بـ $h(\Omega,k)$ والذي يربط
كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث
" $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.



B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي
بتحاكي h إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k\neq 1$ بحيث
$\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

ليكن h تحاكي مركزه Ω ونسبته k .

1) $h(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

2) إذا كان $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$ فإن
$\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

3) a) $h(\Omega)=\Omega$ (نقول إن Ω صامدة بالتحاكي h)

b) $h(M)=M$ تكافئ $M=\Omega$

(هذا يعني أن Ω هي النقطة الوحيدة الصامدة بالتحاكي h)

4) إذا كان $h(M)=M'$ فإن Ω و M و M' مستقيمية .

5) a) التحاكي يحافظ على المرجح يعني :
إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن 'G مرجح
$\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

b) التحاكي يحافظ على المنتصف يعني :
إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن 'I مرجح $[A'B']$

c) التحاكي يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :
إذا كان $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

d) التحاكي يحافظ على استقامية 3 نقط يعني :
إذا كانت النقط A و B و C مستقيمية فإن صورها 'A و 'B و 'C مستقيمية .

6) التحاكي لا يحافظ على المسافة لكن لدينا .
إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $A'B'=|k|AB$

7) التحاكي يحافظ عل قياس الزوايا الهندسية يعني $B\hat{A}C=B'\hat{A'}C'$

8) a) صورة القطعة $[AB]$ بالتحاكي h هي القطعة $[A'B']$

b) صورة المستقيم (AB) بالتحاكي h هي المستقيم $(A'B')$.

c) صورة مستقيم (D) هو مستقيم (D') يوازي (D) .

d) من أجل تحديد صورة مستقيم (D) بـ h يكفي تحديد صورة نقطتين
A و B من (D) وسيكون $h(D)=(A'B')$ أو تحديد صورة نقطة
واحدة A وسيكون $h(D)$ هو المستقيم المار من A' والموازي للمستقيم
(D) . ($h(A)=A'$)

e) إذا كان (D) مستقيما مارا من Ω فإن $h(D)=(D)$.
(نقول إن (D) صامد إجماليا) .

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتحاكي h هي الدائرة $C'(O',|k|r)$.
مع $O'=h(O)$.

10) a) ليكن E و F جزئين من المستوى .
$h(E\cap F)=h(E)\cap h(F)$

b) إذا كانت $M\in E\cap F$ فإن $h(M)\in h(E)\cap h(F)$

11) التحاكي يحافظ على التعامد والتوازي يعني :
صورة مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان
و صورة مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .

12) الصيغة التحليلية لتحاكي .

نفترض أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) مثال 1 : ليكن h تحاكي مركزه $\Omega(1,2)$ ونسبته $k=2$.
من أجل تحديد الصيغة التحليلية للتحكي h نتبع مايلي :
ليكن $M(x,y)$ و $M(x',y')$ بحيث $h(M)=M'$ ونقوم
بحساب x' و y' بدلالة x و y .

لدينا $h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=2\overrightarrow{\Omega M}$

ولدينا $\overrightarrow{\Omega M'}(x'-1,y'-2)$ و $2\overrightarrow{\Omega M}(2x-2,2y-4)$

إذن $\begin{cases}x'-1=2x-2\\y'-2=2y-4\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x'=2x-1\\y'=2y-2\end{cases}$

إذن الصيغة التحليلية لـ h هي : $h:\begin{cases}x'=2x-1\\y'=2y-2\end{cases}$

ملاحظة : إذا أردنا تحديد صورة نقطة A بـ h نعوض x و y بإحداثيات
A ونحصل على إحداثيات $h(A)$.

b) مثال 2 .

نعتبر التطبيق f الذي صيغته التحليلية هي : $f:\begin{cases}x'=3x+2\\y'=3y-4\end{cases}$

من أجل تحديد طبعة f نبحث عن النقط الصامدة بحل النظمة $\begin{cases}x'=x\\y'=y\end{cases}$

يعني $\begin{cases}3x+2=x\\3y-4=y\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ إذن f تقبل نقطة صامدة وحيدة
هي $\Omega(-1,2)$.

ثم نأخذ $M(x,y)$ و $M(x',y')$ بحيث $h(M)=M'$

لدينا إذن $\begin{cases}x'=3x+2\\y'=3y-4\end{cases}$. ولدينا $\overrightarrow{\Omega M'}(x+1,y'-2)$ يعني

$\overrightarrow{\Omega M'}(3x+2+1,3y-4-2)$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}(3x+3,3y-6)$

ولدينا $3\overrightarrow{\Omega M}(3x+3,3y-6)$ إذن $\overrightarrow{\Omega M'}=3\overrightarrow{\Omega M}$

وبالتالي f تحاكي مركزه $\Omega(-1,2)$ ونسبته $k=3$.

13) بعض التقنيات .

a) لكي نحدد مركز تحاكي h . نسميه Ω نبحث عن نقطتين A و B
وصورتاهما 'A و 'B . لدينا $h(A)=A'$ إذن Ω و A و 'A مستقيمية
ومنه $\Omega\in(AA')$. ولدينا $h(B)=B'$ إذن Ω و B و 'B
مستقيمية ونه $\Omega\in(BB')$ وبالتالي Ω هي نقطة تقاطع (AA') و
(BB')

b) من أجل تحديد نسة تحاكي h نسميه k و هناك إمكانيتان :

*) نبحث عن المركز Ω ونقطة A وصورتها A' .

لدينا $h(A)=A'$ إذن $\overrightarrow{\Omega A'}=k\overrightarrow{\Omega A}$ ، ونقوم بحساب $\overrightarrow{\Omega A'}$ بدلالة $\overrightarrow{\Omega A}$ نجد مثلا $\overrightarrow{\Omega A'}=\alpha\overrightarrow{\Omega A}$ ونستنتج أن $k=\alpha$ أو نمر إلى القياس الجبري $\overline{\Omega A'}=k\,\overline{\Omega M}$ يعني $k=\frac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega M}}$.

*) نبحث عن نقطتين A و B وصورتاهما A' و B' .لدينا $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ ونتبع نفس الطريقة السابقة .

c) إذا أردنا أن نبين أن I' منتصف $[A'B']$ نبحث عن I و A و B بحيث $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(I)=I'$ ونستعمل الخاصية (5b . لدينا I منتصف $[AB]$ إذن I' منتصف $[A'B']$.

d) لكي نبين أن Ωو I و J مستقيمية يكفي أن نبين أن $h_{(\Omega,k)}(I)=J$.

e) لكي نحدد صورة نقطة M هناك عدة طرق من بينها :

*) نستعمل التعريف $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

*) إذا كان M منتصف قطعة $[AB]$ نستعمل (5b) .

*) إذا كانت $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ نستعمل (5c) .

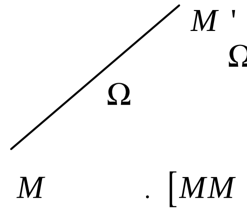
*) إذا كانت M تقاطع جزئين نستعمل (10) .

(لدينا $M\in E\cap F$ إذن $h(M)\in h(E)\cap h(F)$)

*) إذا كانت لدينا الصيغة التحليلية نستعملها .

II) التمـــــــاثل المركـــزي

A) تعريف .



لتكن Ω نقطة التماثل المركزي الذي مركزه Ω هو التطبيق الذي نرمز له بـ S_Ω والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$ يعني Ω منتصف $[MM']$.

B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بتماثل مركزي S_Ω إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للتماثل المركزي مع تعويض k بـ -1 ، ماعدا (6) و (9) حيث تصبح .

6) التماثل المركزي يحافظ على المسافة يعني . إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $A'B'=AB$

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتماثل المركزي S_Ω هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=S_\Omega(O)$.

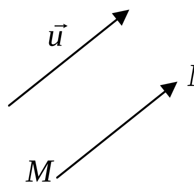
ملاحظة

a) $S_\Omega(M)=M'$ تكافئ Ω منتصف $[MM']$.

b) إذا كان $S_\Omega(M)=M'$ و $S_\Omega(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

III) الإزاحـــــــــة

A) تعريف .



لتكن $\vec u$ متجهة . الإزاحة التي متجهتها $\vec u$ هي التطبيق الذي نرمز له بـ $t_{\vec u}$ والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{MM'}=\vec u$

B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بالإزاحة $t_{\vec u}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للإزاحة ، ماعدا (1) و (2) و (3) و(4) و (6) و (8cde) و (9) و (12) و (13abd) ولدينا :

6) الإزاحة تحافظ على المسافة .

8e) إذا كان (D) يوازي حامل $\vec u$ (يعني $\vec u$ موجهة لـ (D)) فإن $t_{\vec u}(D)=(D)$.

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالإزاحة $t_{\vec u}$ هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=t_{\vec u}(O)$.

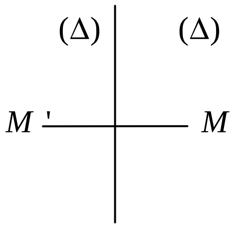
ملاحظة

a) $t_{\vec u}(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec u$.

b) إذا كان $t_{\vec u}(M)=M'$ و $t_{\vec u}(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

III) التمـــاثل المحـــوري

A) تعريف .



لتكن (Δ) مستقيما التماثل المحوري الذي محوره (Δ) هو التطبيق الذي نرمز له بـ $S_{(\Delta)}$ والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث يكون (Δ)واسط القطعة $[MM']$.

B) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للتماثل المحوري ، ماعدا (1) و (2) و (3) و(4) و 5) (6) و (8e) و (9) و (13abd) ولدينا :

6) التماثل المحوري يحافظ على المسافة .

8e) *) إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ فإن $t_{(\Delta)}(D)=(D)$.

*) إذا كان $(D)//(\Delta)$ فإن $t_{(\Delta)}(D)//(D)$.

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتماثل المحوري $S_{(\Delta)}$ هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=S_{(\Delta)}(O)$.

ملاحظة

a) $S_{(\Delta)}(M)=M'$ تكافئ (Δ)واسط القطعة $[MM']$.

b) إذا كان $S_{(\Delta)}(M)=M$ تكافئ $M\in(\Delta)$ المستقيم (Δ) صامد نقطة بنقطة .