تمارين وحلولها

تمرين 1 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 42 و70

2 - استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 42 و70.

الجواب :

1 - قواسم العدد 42 هي :

$$D_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$$

قواسم العدد 70 هي :

$$D_{70}=\{1,2,5,7,10,14,35,70\}$$

2 -من خلال ما سبق فإن أكبر قاسم مشترك لـ 42 و70 هو 14.

إذن $PGCD(42,70)=14$

تمرين 2 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 28 و75

2 - استنتج $PGCD(28,75)$

3 - ماذا تستنتج بالنسبة لـ 28 و75.

الجواب :

1 - قواسم العدد 28 هي :

$$D_{28}=\{1,2,4,14,28\}$$

قواسم العدد 75 هي :

$$D_{75}=\{1,3,15,25,75\}$$

2 - من خلال السؤال 1 فإن :

$$PGCD(28,75)=1$$

3 - بما أن $PGCD(28,75)=1$ فإن 28 و75 أوليان فيما بينهما.

تمرين 3 :

فكك الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية :

735 - 1449 - 2225 - 86625 - 11730

الجواب :

تفكيك العدد 11730

$$\begin{array}{r|l} 11730 & 2 \\ 5865 & 5 \\ 1173 & 3 \\ 391 & 17 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

ومنه فإن $11730=2.5.3.17.23$

تفكيك العدد 86625

$$\begin{array}{r|l} 86625 & 5 \\ 17325 & 5 \\ 3465 & 5 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $86625 = 3^2 . 5^3 . 7 . 11$

تفكيك العدد 2225

$$\begin{array}{r|l} 2225 & 5 \\ 445 & 5 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $2225 = 5^2 . 89$ (العدد 89 عدد أولي)

تفكيك العدد 1449

$$\begin{array}{r|l} 1449 & 3^2 \\ 161 & 7 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $1449 = 3^2 . 7 . 23$

تفكيك العدد 735

$$\begin{array}{r|l} 735 & 5 \\ 147 & 7 \\ 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $735 = 5 . 7^2 . 3$

تمرين 4 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b في كل حالة :

1) $a = 12$; $b = 8$

2) $a = 3$; $b = 4$

3) $a = 5$; $b = 20$

الجواب :

1) مضاعفات العدد 12 هي :

$M_{12} = \{12 , 24 , 36 , 48 , 60 , 72 , ...\}$

مضاعفات العدد 8 هي :

$M_8 = \{8 , 16 , 24 , 32 , 40 , 48 , ...\}$

إذن $ppmc\,(12 , 8) = 24$

2) مضاعفات العدد 9 هي :

$M_9 = \{9 , 18 , 27 , 36 , 45 , 54 , ...\}$

مضاعفات العدد 4 هي :

$M_4 = \{4,8,12,16,20,24,28,32, 36......\}$

إذن $ppmc\,(9 , 4) = 36$

3) مضاعفات العدد 5 هي :

$M_5 = \{5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , ...\}$

مضاعفات العدد 20 هي :

$M_{20} = \{20 , 40 , 60 , 80 , ...\}$

ومنه $ppmc\,(5 , 20) = 20$

تمرين 5 :

1 - بين أن $n^2 + n$ عدد زوجي لكل $n \in \mathbb{N}$

2 - بين أنه إذا كان n زوجي فإن n^2 عدد زوجي حيث $n \in \mathbb{N}$

الجواب :

1 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$n^2 + n = n(n+1)$

إذا كان n زوجي فإن $n = 2k$ فإن $k \in \mathbb{N}$

إذن $n^2 + n = 2k(2k+1)$

$= 2p$

حيث $p = k(2k+1)$

ومنه $n^2 + n$ زوجي .

إذا كان n فردي فإن $n = 2k + 1$

فإن $k \in \mathbb{N}$

إذن $n^2 + n = (2k+1)(2k+1+1)$

$= (2k+1)(2k+2)$

$= 2(2k+1)(k+1)$

$= 2p'$

حيث $p' = (2k+1)(k+1)$

ومنه $n^2 + n$ عدد زوجي .

إذن في الحالتين فإن $n^2 + n$ عدد زوجي .

2 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث n عدد زوجي إذن

$n = 2p$ حيث $p \in \mathbb{N}$

ومنه $n^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$

$= 2k$ حيث $k = 2p^2$

وبالتالي n^2 عدد زوجي .

تمرين 6 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي

بين أنه إذا كان n^2 زوجي فإن n عدد زوجي

الجواب :

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث n^2 زوجي

نفترض أن n فردي إذن $n = 2k + 1$

حيث $k \in \mathbb{N}$

ومنه $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

إذن $n^2 = 2p + 1$

حيث $p = 2k^2 + 2k$

وبالتالي n^2 عدد فردي وهذا يناقض كون n^2 زوجي .

إذن الإفتراض الأول خاطئ ومنه n عدد زوجي.

تمرين 7 :

ليكن $a = 27$ و $b = 24$

1 - حدد القاسم المشترك الأكبر لـ a و b والمضاعف المشترك الأصغر لـ a و b

2 - تحقق أن

$PGCD(a, b) \times ppmc(a, b) = ab$

الجواب :

1 -a- قواسم 27 هي : 1 ; 3 ; 9 ; 27

قواسم 24 هي :

$24 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1$

إذن $PGCD(24, 27) = 3$

لدينا $27 = 3^3$ و $24 = 3 . 2^3$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 27 و 24

هو : $m = 3^3 . 2^3 = 216$

ومنه $ppmc(27, 24) = 216$

2 - لدينا :

$$PGCD(a, b)\times ppmc(a, b) = 216 . 3$$
$$= 648$$
$$ab = 27 . 24 = 648$$

وبالتالي :

$$PGCD(a, b) \times ppmc(a, b) = ab$$

تمرين 8 :

a و b عددان صحيحان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

1 - بين أن :

$(a+b) \wedge b = 1$

$(a+b) \wedge b = 1$ (نقبل أن $a^2 \wedge b^2 = 1$)

2 - a - بين أن : $(n+1) \wedge (n+2) = 1$

ثم استنتج أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ كسر غير قابل للاختزال.

b - تطبيق :

بين أن $\frac{39}{380}$ كسر غير قابل للاختزال.

الجواب :

1 - لدينا $a \wedge b = 1$

ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ b و $a+b$

إذن d يقسم b و $a+b$

ومنه d يقسم $a+b-b$ أي a

إذن d يقسم a و b

إذن d يقسم $a \wedge b = 1$

ومنه $d = 1$ وبالتالي : $(a+b) \wedge b = 1$

لدينا $a \wedge b = 1$

ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ $a+b$ و ab.

إذن d يقسم ab ويقسم $a+b$

ومنه d يقسم ab ويقسم $a(a+b)$

إذن d يقسم $a(a+b) - ab$

أي d يقسم a^2 .

كذلك d يقسم ab و $b(a+b)$

ومنه d يقسم $b(a+b) - ab$

أي d يقسم b^2

إذن d يقسم a^2 و b^2

ومنه d يقسم $a^2 \wedge b^2 = 1$ وبالتالي $d = 1$

ومنه $(a+b) \wedge ab = 1$

2 - a - نضع $(n+1) \wedge (n+2) = d$

إذن d يقسم $n+1$ و d يقسم $n+2$

ومنه d يقسم $(n+2) - (n+1) = 1$

ومنه $d = 1$ وبالتالي:

$$(n+2) \wedge (n+1) = 1$$

نضع $a = n+1$ و $b = n+2$

لدينا $a \wedge b = 1$

إذن $(a+b) \wedge ab = 1$

أي $(2n+3) \wedge (n^2+3n+2) = 1$

لأن $a + b = 2n + 3$

و $ab = n^2 + 3n + 2$

ومنه $\dfrac{2n+3}{n^2+3n+2}$ كسر غير قابل للاختزال.

-b- لنحدد n بحيث $2n + 3 = 39$

إذن $n = 18$

لدينا $2n + 3 = 39$

$$n^2 + 3n + 2 = 380$$

وبما أن $\dfrac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابل للاختزال

فإن $\dfrac{39}{380}$ غير قابل للاختزال

تمرين 9 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b في كل حالة :

1) $a = 12$; $b = 8$

2) $a = 9$; $b = 4$

3) $a = 5$; $b = 20$

الجواب :

1) لدينا $a = 12 = 3 . 2^2$

$b = 8 = 2^3$

إذن المضاعف المشترك الأصغر هو :

$a \vee b = 3^2 . 2^2 = 24$

2) لدينا $a = 9 = 3^2$

$b = 4 = 2^2$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 9 و 4

هو : $a \vee b = 3^2 . 2^2 = 36$

وبالتالي : $a \vee b = 36$

3) لدينا 5 تقسم 20 إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 5 و 20 هو :

$$20 \vee 5 = 20$$

تمرين 10 :

حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y في الحالات التالية وذلك باستعمال خوارزمية أقليدية

(طريقة القسمات المتتالية) :

1 - $x = 837$; $y = 1085$

2 - $x = 5128$; $y = 9615$

3 - $x = 1789$; $y = 1515$

الجواب :

1 - لنحدد $1085 \wedge 837$

المرحلة	x	y	الباقي
1	837	1085	248
2	248	837	93
3	93	248	62
4	62	93	31
5	31	62	0

$$1085 = 837 \times 1 + 248$$
$$837 = 248 \times 3 + 93$$
$$248 = 93 \times 2 + 62$$
$$93 = 62 \times 1 + 31$$
$$62 = 31 \times 2 + 0$$

وبالتالي $1085 \wedge 837 = 31$

2 - لنحدد $9615 \wedge 5128$

المرحلة	x	y	الباقي
1	5128	9615	4487
2	4487	5128	641
3	641	4487	0

$$9615 = 5128 \times 1 + 4487$$
$$5128 = 4487 \times 1 + 641$$
$$4487 = 641 \times 7 + 0$$

وبالتالي $9615 \wedge 5128 = 641$

3 - لنحدد $1789 \wedge 1515$

المرحلة	x	y	الباقي
1	1515	1789	274
2	274	1515	145
3	145	274	129
4	129	145	16
5	16	129	1
6	1	16	0

$$1789 = 1515 \times 1 + 274$$
$$1515 = 274 \times 5 + 145$$
$$274 = 145 \times 1 + 129$$
$$145 = 129 \times 1 + 16$$
$$129 = 16 \times 8 + 1$$
$$16 = 16 \times 1 + 0$$

وبالتالي $1789 \wedge 1515 = 1$

تمرين 11 :

1 - حدد $d = PGCD\,(102\,,\,119)$

2 - تحقق من أن $\frac{119}{d}$ و $\frac{102}{d}$ أوليين فيما بينهما.

الجواب :

1- لدينا $199 = 102 \times 1 + 17$

$$102 = 17 \times 6 + 0$$

إذن حسب خوارزمية أقليدية فإن :

$$PGCD\,(102\,,\,119) = 17$$

2 - لدينا $\frac{119}{17} = 7$ و $\frac{102}{17} = 6$

6 و 7 متتابعان إذن $7 \wedge 6 = 1$

ومنه $\frac{119}{d} \wedge \frac{102}{d} = 1$

أي $\frac{119}{d}$ و $\frac{102}{d}$ أوليان فيما بينهما .

تمرين 12 :

أجعل النسبة غير قابلة للأختزال في

الحالات التالية :

أ - $\frac{3172}{915}$

ب - $\frac{2332}{47223}$

ج - $\frac{30227}{36019}$

الجواب :

أ - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ 3172 و 915

$$3172 = 3 \times 915 + 427$$

$$915 = 2 \times 427 + 61$$

$$427 = 7 \times 61 + 0$$

ومنه $915 \wedge 3172 = 61$

إذن $\frac{3172}{915} = \frac{61 \times 52}{61 \times 15}$

إذن $\frac{3172}{915} = \frac{52}{15}$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ 2332 و 47223

$$47223 = 2332 \times 20 + 583$$

$$2332 = 583 \times 4 + 0$$

ومنه $47223 \wedge 2332 = 583$

إذن $\frac{3172}{915} = \frac{583 \times 4}{583 \times 81}$

ومنه $\frac{2332}{47223} = \frac{4}{81}$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ :

36019 و 30227

$$36019 = 30227 \times 1 + 5792$$

$$30227 = 5792 \times 5 + 1267$$

$$5792 = 1267 \times 4 + 724$$

$$1267 = 724 \times 1 + 543$$

$$724 = 543 \times 1 + 181$$

$$543 = 181 \times 3 + 0$$

ومنه $30227 \wedge 36019 = 181$

إذن $\frac{30227}{36019} = \frac{167 \times 181}{199 \times 181}$

ومنه $\frac{30227}{36019} = \frac{167}{199}$

تمرين 13 :

حدد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث:

$$xy = 3x + 2y$$

الجواب :

$xy = 3x + 2y$ يعني $xy - 3x = 2y$

يعني $x(y - 3) = 2y - 6 + 6$

يعني $x(y - 3) = 2(y - 3) + 6$

يعني $x(y - 3) - 2(y - 3) = 6$

يعني $(y - 3)(x - 2) = 6$

يعني $(y - 3)(x - 2) = 2 \times 3 = 1 \times 6$

يعني $x - 2 = 2$ و $y - 3 = 3$

أو $x - 2 = 6$ و $y - 3 = 1$

يعني $x = 4$ و $y = 6$

أو $x = 8$ و $y = 4$

إذن $S = \{(4 , 6) ; (8 , 4)\}$

تمرين 14 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي .

نضع $F = \dfrac{n + 9}{n - 6}$

1 - حدد في كل حالة الشكل المختزل لـ F

$n = 9$; $n = 25$; $n = 46$

2 - بين أن $F = 1 + \dfrac{15}{n - 6}$

3 - حدد جميع قيم n التي من أجلها يكون F عدد صحيح طبيعي .

الجواب :

1 - إذا كان $n = 9$ فإن :

$$F = \frac{9 + 9}{9 - 6} = \frac{18}{3} = 6$$

إذا كان $n = 25$ فإن :

$$F = \frac{25 + 9}{25 - 6} = \frac{34}{19}$$

وهذا هو الشكل المختزل لـ F لأن 34 و19 أوليان فيما بينهما.

إذا كان $n = 46$ فإن :

$$F = \frac{46 + 9}{46 - 6} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$$

وهذا الشكل المختزل لـ F.

2 - لدينا

$$F = \frac{n + 9}{n - 6} = \frac{n - 6 + 15}{n - 6} = 1 + \frac{15}{n - 6}$$

وبالتالي $F = 1 + \dfrac{15}{n - 6}$

3 - لدينا $F = 1 + \dfrac{15}{n - 6}$

$F \in \mathbb{N}$ تكافئ $1 + \dfrac{15}{n - 6} \in \mathbb{N}$

تكافئ $\dfrac{15}{n - 6} \in \mathbb{N}$

يعني $n - 6$ تقسم 15

يعني

$n - 6 = 1$ أو $n - 6 = 3$ أو $n - 6 = 5$ أو $n - 6 = 15$

يعني

$n = 7$ أو $n = 9$ أو $n = 11$ أو $n = 21$

إذن $F \in \mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان :

$n = 7$ أو $n = 9$ أو $n = 11$ أو $n = 21$