مذكرة رقم 1 في مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ أولية في الحسابيات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

- التعرف على المجموعة $\mathbb{N}$.
- التعرف على مضاعفات و قواسم عدد.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جداء عوامل أولية.
- توظيف التفكيك في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.
- توظيف الزوجية و تفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

I. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية $\mathbb{N}$.

تمرين : من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية : 2 ,5 - ,11 ,$\frac{11}{4}$, 12-17, $\sqrt{2}$, $\sqrt{16}$, 2,5 .

تعريف: كل الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

مصطلحات ورموز: العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم
الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^*$.
$\mathbb{N}^*=\{1,2,\cdots\}$ تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير منعدمة

7 هو عدد صحيح طبيعي نكتب $7\in\mathbb{N}$
8- ليس بعدد صحيح طبيعي نكتب $-8\notin\mathbb{N}$

تمرين: باستعمال الرموز: $\in;\notin;\subset;\not\subset$ املأ الفراغات التالية :

-7...$\mathbb{N}$ و $\frac{2}{3}$.....$\mathbb{N}$ و $\sqrt{2}$.....$\mathbb{N}$ و $\frac{8}{2}$.....$\mathbb{N}$ و $-\frac{15}{3}$....$\mathbb{N}$

و $12-32$...$\mathbb{N}$ و $\sqrt{25}$...$\mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{100}}{5}$.....$\mathbb{N}$ و 2,12...$\mathbb{N}$

π......$\mathbb{N}$ و 0.....$\mathbb{N}^*$ و $\{1;2;7\}$...$\mathbb{N}$ و $\{4;-2;12\}$...$\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}^*$...$\mathbb{N}$

الجواب: $-7\notin\mathbb{N}$ $\quad \frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$ $\quad \sqrt{2}\notin\mathbb{N}$ $\quad \frac{8}{2}\in\mathbb{N}$ $\quad -\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$

$12-32\notin\mathbb{N}$ $\quad \sqrt{25}\in\mathbb{N}$ $\quad \frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{N}$ $\quad 2.12\notin\mathbb{N}$ $\quad \pi\notin\mathbb{N}$

$0\notin\mathbb{N}^*$ $\quad \{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$ $\quad \{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$

II. الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية:

تعريف: a عدد صحيح طبيعي زوجي اذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :
$a=2k$
a عدد صحيح طبيعي فردي اذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :
$a=2k+1$

مثال: الأعداد: 0, 108 , 304, 202, 1006 و 12^2 و 15×1731 هي أعداد زوجية. لماذا ؟
الأعداد: 1, 13, 165, 209, 2007 هي أعداد فردية. لماذا ؟

ملاحظات : كل عدد صحيح طبيعي اما هو زوجي أو فردي ولدينا مجموعة من النتائج في الجدول التالي :

الأعداد	a	b	a+b	a-b	a xb
زوجية الأعداد	زوجي	زوجي	زوجي	زوجي	زوجي
	فردي	فردي	زوجي	زوجي	فردي
	فردي	زوجي	فردي	فردي	زوجي
	زوجي	فردي	فردي	فردي	زوجي

مثال: أدرس زوجية الأعداد: 12^2 و 15×1731

تمرين: $n\in\mathbb{N}$ أدرس زوجية الأعداد التالية:
4516 $\quad 4\times51+1$ $\quad 2n+4$ $\quad 4n+9$ $\quad 4n^2+4n+1$ $\quad 6n^2+12n$

الجواب: $4516=2\times2258$ اذن $4516=2\times k$ حيث : $k=2258$
وبالتالي : 4516 عدد زوجي
$4\times571+1=2\times2\times571+1=2\times k+1$ اذن حيث : $k=2\times571$
وبالتالي : $4\times51+1$ عدد فردي
$2n+4=2(n+2)=2\times k$ حيث : $k=n+2$
وبالتالي : $2n+4$ عدد زوجي
$4n+9=2(2n+4)+1=2\times k+1$ حيث : $k=2n+4$
وبالتالي : $4n+9$ عدد فردي
$4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1=2\times k+1$ حيث : $k=2n^2+2n$
وبالتالي : $4n^2+4n+1$ عدد فردي
$6n^2+12n=2(3n^2+6n)=2\times k$ حيث : $k=3n^2+6n$
وبالتالي : $6n^2+12n$ عدد زوجي

تمرين: $a\in\mathbb{N}$ و $b\in\mathbb{N}$

1. بين أنه اذا كان a عددا زوجيا و b عددا زوجيا فان $a+b$ عدد زوجيا
2. بين أنه اذا كان a عددا فرديا و b عددا فرديا فان $a+b$ عدد فرديا
3. بين أنه اذا كان a عددا زوجيا فان a^2 عدد زوجي
4. بين أنه اذا كان a عددا فرديا فان a^2 عدد فرديا
5. استنتج أنه اذا كان a^2 عدد فرديا فان a عددا فردي

الجواب:
1) $a=2\times k$ حيث $k\in\mathbb{N}$
$b=2\times k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$
$a+b=2\times k+2\times k'=2\times(k+k')=2\times k''$ حيث $k''=k+k'$
وبالتالي : $a+b$ عدد زوجي
2) $a=2\times k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$
$b=2\times k'+1$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

حيث $a+b=2\times k+1+2\times k'+1=2\times(k+k'+1)=2\times k''$

$k''=k+k'+1$

وبالتالي : $a+b$ عدد زوجي

3) $a=2\times k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2\times k)^2=4\times k^2=2\times2\times k^2=2\times k'$ حيث $k'=2k^2$

وبالتالي : a^2 عدد زوجي

4) $a=2\times k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2\times k+1)^2=(2\times k)^2+2\times2\times k\times1+1^2=4k^2+4k+1$

$a^2=2\times(2k^2+2k)+1=2\times k'+1$ حيث $k'=2k^2+2k$

وبالتالي : a^2 عدد فردي

5) معطيات a^2 عدد فردي

نبين أن a عدد فردي

نفترض أن a عدد زوجي اذن حسب النتيجة السابقة فان a^2 عدد زوجي ولكن حسب المعطيات a^2 عدد فردي وبالتالي افتراضنا كان خاطئا أي أنه a عدد فردي

III. قواسم عدد و مضاعفات عدد والقاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر:

نشاط :

- حدد المضاعفات العشرة الأولى العدد 6
- حدد المضاعفات العشرة الأولى العدد 9
- حدد أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9

الجواب :

- المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 هي 0 و 6 و 12 و 18 و 24 و 30 و 36 و 42 و 48 و54
- المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9هي 0 و9 و 18 و 27 و 36 و 45 و 54 و 63 و 72 و 81
- 18هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين6 و 9

ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين6 و 9 .و نرمز له بالرمز.

$PPCM(6;8)=18$

تعريف1: a وb عنصران من $\mathbb{N}$. نقول ان a مضاعف للعدد b إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $a=bn$,

مثال: لدينا: $145=5\times29$ اذن : 145 مضاعف للعدد 5 لأنه ....

تعريف2: ليكن a و bعنصرين من $\mathbb{N}$. أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b. و نرمز له بالرمز $PPCM(a;b)$.

مثال: مضاعفات العدد 12 هي 0 و 12 و 24 و 36 و 48 و 60 و 72 و.........

مضاعفات العدد 8 هي: 0 و 8 و 16 و 24 و 32 و 40 و 48 و.........إذن:

$PPCM(12;8)=24$.

تمرين: حدد مضاعفات العدد 9 المحصورة بين 23 و 59

الجواب :لدينا مضاعفات العدد 9 تكتب على الشكل $9n$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.

مضاعفات 9 المحصورة بين 23 و 59 هي الأعداد التي تكتب على شكل $9n$ بحيث n من $\mathbb{N}$ و المحصورة بين 23 و 59 الحالات الممكنة هي: 3×9 و 4×9 و 5×9 و 6×9. أي القيم الممكنة للعدد n هي: 3 و 4 و 5 و 6.

و بالتالي المضاعفات التي نبحث عنها هي: 27 و 36 و 45 و 54.

تعريف2: a وb عنصران من $\mathbb{N}$.

نقول ان b قاسم للعدد a إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $a=bn$,

مثال: لدينا: $145=5\times29$

إذن: - العدد 145 مضاعف للعددين 5 و 29 .

- العددان 5 و 29 هما قاسمان للعدد 145.

ملحوظة: العدد 0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

العدد 1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

تعريف2:ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين.

أكبر قاسم مشترك للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

و يرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$.

مثال: قواسم العدد 12 هي: 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 12. و قواسم العدد 15 هي: 1 و 3 و 5 و 15.إذن: $PGCD(12;15)=3$

تمرين : نضع: $x=3\times5\times7\times12$ و $y=2\times5\times3\times5$.

دون حساب x و y بين أن:

1. 75 قاسم للعدد y.
2. 105 قاسم للعدد x.

الجواب :1)لدينا $y=2\times5\times3\times5$ أي أن: $y=2\times75$ و منه فان 75 قاسم للعدد y.

2)لدينا $x=3\times5\times7\times12$ أي أن: $x=105\times12$

و منه فان 105 قاسم للعدد x.

تمرين : حدد الرقم x لكي يكون العدد : 2 x 53 قابلا للقسمة على 9

الجواب : $0\le x\le9$ العدد : 2 x 53 قابلا للقسمة على 9

اذن: $2+x+5+3$ مضاعف للعدد 9 يعني $10+x$ مضاعف للعدد 9 اذن : $x=8$

تمرين:ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

نضع $x=2n+7$ و $y=4n+2$.

1. بين أن x عدد فردي و y عدد زوجي.
2. بين أن $(x+y)$ مضاعف للعدد 3.

الجواب :1)لدينا $x=2n+7$ أي أن: $x=2(n+3)+1$

و بالتالي x عدد فردي لأن: $x=2k+1$ حيث: $k=n+3$

و لدينا $y=4n+2$ أي أن $y=2(2n+1)$

و بالتالي y عدد زوجي لأن: $y=2k$ حيث: $k=2n+1$

2) لدينا $x+y=2n+7+4n+2$ أي أن: $x+y=6n+9$

و بالتالي $x+y=3(2n+3)$ اذن $x+y$ مضاعف للغدد 3.

IV. مصاديق قابلية القسمة على : 2 و 3 و 4 و 5 و 9

خاصية:ليكن n عددا صحيحا طبيعيا. يكون العدد n قابلا للقسمة:

على 2: اذا كان رقم و حداته هو : 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.

على 3: اذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3.

على4: اذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا للعدد 4.

على 5: اذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.

على 9: اذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 9.

أمثلة: العدد 4752 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته هو 5,

العدد 4725 يقبل القسمة على 3 و 9.لأن العدد (4+7+2+5)=18 مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 9.

العدد 1628 مضاعف للعدد 2 لأن رقم وحداته هو 8.

العدد 1628 مضاعف للعدد 4 لأن رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب العدد 28 و هو مضاعف للعدد 4.

تمرين : أدرس قابلية قسمة العدد 3611790 على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.

أدرس قابلية قسمة الأعداد : 120052005 و1001001 و79541 و 19350 و 3140 و3752 و 3333426 و145610 و200070 على 3 و 9.

الجواب :بما أن رقم وحدات العدد 3611790 هو 0, فان 3611690 يقبل القسمة على 2 و 5.

العدد 90 لا يقبل القسمة على 4. وإذن العدد 3611790 لا يقبل القسمة على 4.

مجموع أرقام العدد 3611790 هو 27. (27=3+6+1+1+7+9+0) و 27 مضاعف للعدد 3, إذن 3611790 يقبل القسمة على 3.

و بما أن 27 مضاعف للعدد 9 فان 3611790 يقبل القسمة على 9.

هل العدد : 120052005 قابل للقسمة على 3 ؟ نعم مجموع أرقامه هو 15 اذن يقبل القسم على 3 بالمثل 1001001

هل الأعداد : 79541 و 3140 و 3752 قابلة للقسمة على 3 ؟ لا لأن مجموع الأرقام عدد لا يقبل القسم على 3

V. الأعداد الأولية و التفكيك إلى جداء عوامل أولية

تعريف: عدد أولي هو كل عدد صحيح طبيعي a يقبل قاسمين فقط هما العدد 1 و العدد a.

مثال: الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

خاصية:نقبل أن كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يكتب على شكل عوامل جداء عوامل أولية.

مثال: لدينا: $640=64\times10$ أي $640=8^2\times2\times5$ إذن:

$640=(2^3)^2\times2\times5$

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

و منه: $640 = 2^7 \times 5$

العوامل المكونة لهذا الجداء هي الأعداد الأولية 2و 5.

تقنية للتفكيك : لتفكيك a عدد الى جداءعوامل أولية نأخد أصغر عدد أولي يقسمه وننجز القسمة فنحصل على خارج b فنأخد أصغر عدد أولي يقسم b وننجز القسمة فنحصل على خارج c .....فنتابع عملية القسمة حتى نحصل على خارج يساوي 1 و العدد a سيكون هو جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا عليها

مثال: فكك العدد 1344 الى جداء عوامل أولية **الجواب :** $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$

تمرين : فكك العدد 60 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج جميع قواسم العدد 60

الجواب : $60 = 2^2 \times 5 \times 3$ اذن القواسم هم : 1و2و3و4و5و6و10و12و15و30و60

تمرين : حدد جميع قواسم العدد 12 ثم حدد جميع قواسم العدد 15 ثم حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 15

الجواب : قواسم العدد 9 هم : 1و3و9 **:** قواسم العدد 16 هم : 1و2و4و8و16 اذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 9 و 16 هو 1

و منه فان 9 و 16 أوليين فيما بينهما

تمرين : هل العدد 1004001 عدد أولي؟

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.

و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

تمرين حدد الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية : 0 و 1 و 2 و17 و 21 و 41 و 87 و 105 و 239 و 2787 و 191 و 1004001

الجواب : 0 ليس بعدد أولي لأن كل الأعداد تقسم 0 و **1** ليس بعدد أولي لأن له قاسم وحيد هو 1 و **2** عدد أولي لأن له قاسمين فقط

و **17** عدد أولي لأن له قاسمين فقط و **21** ليس بعدد أولي لأن : $21 = 7 \times 3$ و **41** عدد أولي لأن له قاسمين فقط و **87** ليس بعدد أولي لأن : $87 = 29 \times 3$ و و **105** ليس بعدد أولي لأن : $105 = 5 \times 21$

هل العدد **239** أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 239$ وهي : 2 و 3 و 5 و7 و11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 239

اذن العدد 239 أولي

2787 ليس بعدد أولي لأنه يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه 24)

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

هل العدد **191** أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 191$ وهي : 2 و 3 و 5 و7 و11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 191

اذن العدد 191 أولي

VI. القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر:

خاصية 1 :القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة مرفوعة الى أصغر أس

خاصية 2 :المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة والغير المشتركة مرفوعة الى أكبر أس

تمرين: فكك الأعداد : و220 و 798 الى جداء عوامل أولية

حدد : $PGCD(220;798)$ و $PPCM(220;798)$ و $PPCM(1650;5292)$

الجواب : $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ $798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19$ اذن : $PGCD(220;798) = 2^1 = 2$ و $PPCM(220;798) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 = 87780$