

I. Rappel : symétrie axiale, symétrie centrale et translation

1. Définitions

- ☒ Une transformation T du plan, est une relation qui à tout point M du plan, associe un unique point M' . On écrit $T(M) = M'$
- ☒ On dit qu'un point M est invariant par une transformation T si $T(M) = M$

2. La symétrie centrale

Définition:

Soit O un point du plan

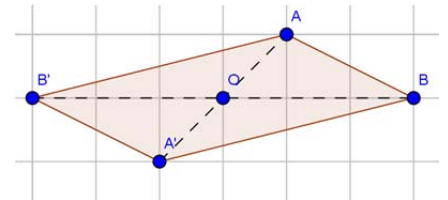
La transformation qui à tout point M du plan, associe un unique point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$ est appelé : Symétrie centrale de centre O . On note S_O

Remarque:

Le point O est le seule point invariant par la symétrie de centre O

Propriétés:

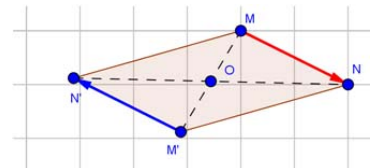
- $S_O(M) = M'$ si et seulement si $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$
- Si $S_O(A) = A'$ et $S_O(B) = B'$ alors le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme
- La symétrie centrale a un seul point invariant, c'est son centre.



Propriété caractéristique de la symétrie centrale:

Théorème:

Une transformation du plan T est une symétrie central de centre O si et seulement si pour tous les points M et N du plan on a: $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ avec $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$



3. La symétrie orthogonale ou réflexion

Définition:

Soit (Δ) une droite du plan

La transformation qui à tout point M du plan, associe un unique point M' tel que (Δ) soit la médiatrice de $[MM']$ est appelé :

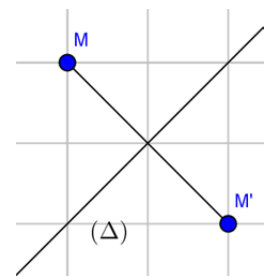
Symétrie orthogonale ou Réflexion d'axe (Δ) . On note $S_{(\Delta)}$

Remarque:

Les points de la droite (Δ) sont invariants par la symétrie orthogonale d'axe (Δ)

Propriétés:

- $S_{(\Delta)}(M) = M'$ si et seulement si (Δ) passe par le milieu de $[MM']$ et $(\Delta) \perp (MM')$
- La symétrie orthogonale inverse les angles orientés

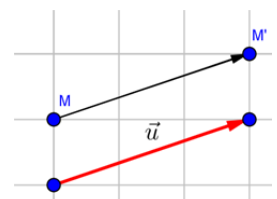


4. La translation

Définition:

Soit \vec{u} un vecteur non nul.

La transformation qui à tout point M du plan, associe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelé : translation de vecteur \vec{u} . On note $t_{\vec{u}}$



Remarque:

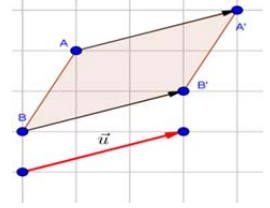
Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul.

Propriété:

Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation, alors le quadrilatère $AA'B'B$ est un parallélogramme

Propriété caractéristique de la translation:**Théorème:**

Une transformation du plan T est une translation de vecteur \vec{u} si et seulement si pour tous les points M et N du plan on a: $\overline{M'N'} = \overline{MN}$ avec $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$

**5. Propriétés****Propriétés de conservation**

Les symétries (centrale et axiale) et les translations conservent l'alignement, les mesures des angles, les longueurs et les aires.

Images de certaines figure par une transformation**Théorème:**

Soit T une symétrie centrale, symétrie axiale ou translations,

- L'image d'un segment par la transformation T est un segment de même longueur
- L'image d'une droite par la transformation T est une droite
- L'image d'un cercle de centre Ω par la transformation T est un cercle de centre $T(\Omega)$ et de même rayon
- L'image d'un triangle par la transformation T est un triangle
- L'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure
- Les images de deux droites parallèles par la transformation T sont deux droites parallèles
- Les images de deux droites perpendiculaires par la transformation T sont deux droites perpendiculaires

II. L'homothétie**Définition:**

Soit O un point du plan et k un réel non nul

La transformation qui à tout point M du plan, associe un unique point M' tel que $\overline{OM'} = k\overline{OM}$ est appelé : l'homothétie de centre O et de rapport k . On note $h_{(O,k)}$

Remarque:

Le point O est le seul point invariant par l'homothétie de centre O et de rapport k

Exemple:

$$h(O,2) ; h(O,1) ; h\left(O,\frac{1}{2}\right) ; h(O,-1) ; h(O,-2)$$

Propriétés:

- $h_{(O,k)}(M) = M'$ si et seulement si $\overline{OM'} = k\overline{OM}$
- Si $h_{(O,k)}(A) = A'$ et $h_{(O,k)}(B) = B'$ alors le quadrilatère $AA'B'B$ est un trapèze
- Si $k = 1$ alors, tous les points du plan sont invariants par l'homothétie $h_{(O,k)}$
- Si $k \neq 1$ alors, Le point O est le seul point invariant par l'homothétie $h_{(O,k)}$
- Si $k = -1$ alors, l'homothétie $h_{(O,-1)}$ n'est que la symétrie centrale de centre O
- Si $h_{(O,k)}(M) = N$ alors $h_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(N) = M$

Remarque:

- L'homothétie est une transformation qui agrandi les figures si $k > 1$ et qui les réduit si $k < 1$
- L'homothétie ne conserve ni les distances ni les aires

Propriété caractéristique de l'homothétie:**Théorème:**

Une transformation du plan T est une homothétie h de centre O et de rapport k avec $k \neq 1$ si et seulement si pour tous les points M et N du plan on a: $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$ avec $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$

III. Effets de l'homothétie**1- Distances, aires et volumes**

Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

2- Conservation de l'alignement

Si A, B et C sont trois points alignés, leurs images A', B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

3- Conservation du parallélisme

Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, leurs images d'_1 et d'_2 par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

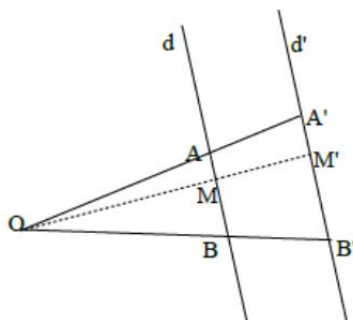
4- Conservation des angles orientés

Dans le plan orienté, si A, B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie, alors

En particulier, les homothéties conservent les angles droits, donc l'orthogonalité.

IV. Images de certaines figures géométriques par une homothétie**1- Image d'une droite**

Une homothétie transforme une droite d en une droite d' parallèle à d . Si la droite d passe par le centre de l'homothétie, alors $d' = d$.

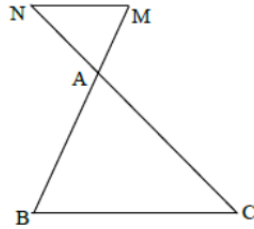
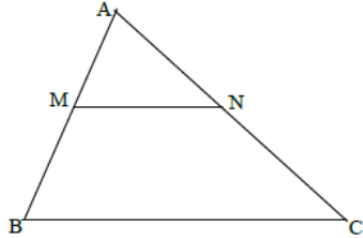


1- Triangles homothétiques

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC) .

Si (MN) est parallèle à (BC) , alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N .

Les triangles AMN et ABC sont dits **homothétiques**, ils sont dans la configuration de Thalès



2- Image d'un cercle

Une homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre I' et de rayon R' avec $I' = h(I)$ et $R' = |k| R$.