Bilan 5 : Calculer le PGCD de deux nombres entiers

Définition : Le **PGCD** de deux nombres entiers est **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur.

Méthodes de calcul	*Exemples*	
Méthode 1 : Soustractions successives : **1-** Pour calculer PGCD de deux nombres, on soustrait le plus petit des deux nombres au plus grand. **2-** On prend le résultat de la soustraction et le plus petit des deux nombres, et on recommence. **3-** On continue jusqu'à obtenir zéro. **4-** Le dernier nombre obtenu avant zéro est le PGCD.	**PGCD de 36 et 60 :** • 60 – 36 = 24 • 36 – 24 = 12 • 24 – 12 = 12 • 12 – 12 = 0 donc PGCD(36;60) = 12	**PGCD de 100 et 45 :** • 100 – 45 = 55 • 55 – 45 = 10 • 45 – 10 = 35 • 35 – 10 = 25 • 25 – 10 = 15 • 15 – 10 = 5 • 10 – 5 = 5 • 5 – 5 = 0 donc PGCD(100;45)=5
Méthode 2 : Algorithme d'Euclide : **1-** On fait la division euclidienne du plus grand nombre par le plus petit. (touche $\boxed{\div R}$ de la calculatrice donne quotient et reste). **2-** On recommence avec le diviseur et le reste de la division précédente. **3-** On s'arrête lorsque le reste est nul. **4-** Le PGCD est le dernier reste non nul.	**Calcul du PGCD de 225 et 105 :** 255 = **105**×2+**45** 105 = **45**×2+**15** 45 = 15×3+0 donc PGCD(255,105) = 15	

Fractions irréductibles :	*Exemples*
Une fraction est dite **irréductible** si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. (C'est-à-dire si leur PGCD est égal à 1.) Pour obtenir la forme irréductible d'une fraction : • on calcule le PGCD du numérateur et du dénominateur ; • puis on divise le numérateur et le dénominateur de cette fraction par leur PGCD. • On obtient une fraction irréductible.	**Simplifier la fraction** $\frac{36}{60}$: • On calcule le PGCD, on trouve PGCD(36 ; 60)=12. • $\frac{36}{60}=\frac{\cancel{12}\times 3}{\cancel{12}\times 5}=\frac{3}{5}$ **Simplifier la fraction** $\frac{225}{105}$: • On calcule le PGCD, on trouve PGCD(255,105)=15 • $\frac{225}{105}=\frac{\cancel{15}\times 15}{\cancel{15}\times 7}=\frac{15}{7}$

Nombres premiers entre eux :	*Exemples*
On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** quand ils ont pour unique diviseur commun 1 ; c'est-à-dire que **leur PGCD est 1**. Pour déterminer si deux nombres sont premiers entre eux : • Soit on trouve un diviseur commun évident : souvent 2 ou 5 ou 10 ; ils ne sont donc pas premiers entre eux ; • Soit on calcule leur PGCD.	• 7 965 et 6 195 ne sont pas premiers entre eux, car ils sont divisibles par 5. • 46 et 78 ne sont pas premiers entre eux, car ils sont divisibles par 2. • 1575 et 572 sont premiers entre eux, car en calculant leur PGCD, on trouve 1.

Résolution de problèmes :	*Exemples*
Pour résoudre un problème qui fait intervenir les diviseurs communs de deux nombres. • Il faut calculer le PGCD de ces deux nombres • Répondre à la question en utilisant le PGCD. • Souvent, il est nécessaire de faire un schéma pour comprendre ce qui est demandé.	On veut recouvrir un mur (de dimensions 240 cm de haut et 176 cm de large) avec un *nombre entier* de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres *le plus grand* possible. • Déterminer la longueur du côté d'un carreau : on calcule PGCD(240, 176)=16. la longueur du côté est 16 cm. • Combien faudra-t-il alors de carreaux ? Il faut 15 carreaux en hauteur car 15×16=240cm et 11 carreaux en largeur car 11×16=176cm. C'est-à-dire 11×15=165 carreaux au total.