

**I. Définition d'un polynôme****1. Définition**

Un **polynôme**  $P$  est une combinaison linéaire des puissances naturels d'une indéterminée " $x$ ".  
C'est-à-dire :  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  tels que  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_i \in \mathbb{R}$ , pour tout  $0 \leq i \leq n$ .

$a_i$  s'appelle coefficient du terme de degré  $i$

$a_0$  est le terme constant

Si  $a_n \neq 0$  alors  $\deg(P) = d^\circ P = n$

**2. Propriétés**

☒ Pour tout réel  $x$  :  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$

☒ Pour tout réel  $x$  :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \Leftrightarrow$  pour tout  $i, 0 \leq i \leq n: a_i = b_i$

**II. Opérations sur les polynômes****1. Théorèmes**

Pour tout réel  $x$  on a :  $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$  ;  $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$  ;

$(\alpha P)(x) = \alpha P(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$

**2. Propriétés**

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes non nuls.

- $d^\circ(P+Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q)$
- $d^\circ(\alpha P) = d^\circ P$  pour tout  $\alpha$  non nul
- $d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $d^\circ P^n = n d^\circ P$

**III. Racine d'un polynôme - Factorisation d'un polynôme****1. Division euclidienne**

**Théorème:**

Soient  $P$  et  $H$  deux polynômes non nuls à coefficients réels.

Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes à coefficients réels tels que:

$$P(x) = Q(x)H(x) + R(x) \text{ avec } d^\circ R < d^\circ H$$

$Q$  et  $R$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $H$

**2. Division par :  $(x-a)$** 

**Théorème:**

Soit  $P$  un polynôme de degré non nul  $n$  et  $a$  un réel donné

Il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n-1$  tel que  $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$

$Q(x)$  et  $P(a)$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P(x)$  par  $(x-a)$

**3. Racine d'un polynôme**

**Définition:**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n, n \geq 1$

On dit qu'un réel  $a$  est une racine ou un zéro du polynôme  $P$  si  $p(a) = 0$

**Remarque:**

Déterminer les racines ou les zéros d'un polynôme  $P$ , c'est résoudre l'équation  $P(x) = 0$

**Théorème:**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  à coefficients réels.

- ☒ Le polynôme  $P$  possède au plus  $n$  racines réelles
- ☒  $P(a) = 0$  si et seulement si  $P(x)$  est divisible par  $(x-a)$