

Professeur : Rachid BELEMOU

Lycée : Oued Eddahab

COURS

Les polynômes

Niveau : TCT - BIOF

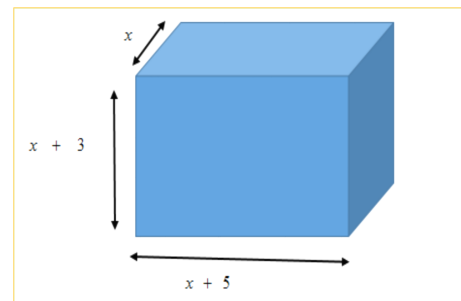
Année : 2017-2018

I. Activité 1

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions x , $x+3$ et $x+5$

avec x réel strictement positif. Soit $V(x)$ le volume de ce parallélépipède

- 1) Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$
- 2) Calculer $V(1)$ et $V(2)$.
- 3) Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer $V(1)$ et $V(2)$?



II. Vocabulaire

L'exemple $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée fonction polynôme par abus de langage dirons brièvement polynôme de degré 3 on note $d^\circ(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15, 0 sont appelés coefficients du polynôme $V(x)$.

III. Définition d'un polynôme

a. Définition: On appelle polynôme de degré n , et on le nomme $P(x)$ une expression littérale en x de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. avec $a_n \neq 0$, a_n , a_{n-1} , ..., a_2 , a_1 , a_0 sont appelés coefficients du polynôme et a_0 est appelé terme constant.

b. Exemple : soit $P(x) = -5x^4 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$

$P(x)$ est un polynôme de degré 4 on écrit $d^\circ(P) = 4$

Les réels -5 , 0 , $\sqrt{3}$, 4 , -7 sont les coefficients de $P(x)$ car on peut écrire

$$P(x) = -5x^4 + 0x^3 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$$

c. Application 1

On considère les expressions littérales suivantes $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} - 1$,

$$g(x) = -x^5 + 3x^3 + x + 6, \quad h(x) = \sqrt{13 - x^2} - 2x$$

- 1) Calculer $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$
- 2) Reconnaître parmi les expressions celles qui représentent un polynôme en précisant son degré et ses coefficients

d. Application 2

Ecrire le polynôme $p(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficients sont $-1, 0, 0, -3, 1$

Vocabulaire :

➤ un polynôme de 2eme degré écrit en général $P(x) = ax^2 + bx + c$; avec $a \neq 0$

On le nomme trinôme : ex : $P(x) = -3x^2 - 6x + 2$

➤ un polynôme de 1er degré écrit en général $P(x) = ax + b$; avec $a \neq 0$

ex : $g(x) = -7x + 1$

ex : $P(x) = 0$ s'appelle polynôme nul

IV. Egalité de deux polynômes

Définition:

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exercice

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes définies par $P(x) = ax^3 + (b - 2)x^2 + (4 - c)x + d$ avec a, b, c et d sont des réels, et $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$

Déterminons a, b, c et d sachant que $P(x) = Q(x)$ pour tout réel x

V. Opérations sur les polynômes

a. Somme et produit de deux polynômes

La somme de deux polynômes P et Q est aussi un polynôme noté $P+Q$

$$d^{\circ}(P + Q) \leq \sup(d^{\circ}(P); d^{\circ}(Q))$$

La différence de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P-Q$

$$d^{\circ}(P - Q) \leq \sup(d^{\circ}(P); d^{\circ}(Q))$$

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P \times Q$

$$d^{\circ}(P \times Q) = d^{\circ}(P) + d^{\circ}(Q)$$

b. Application:

Calculer $(P+Q)(x)$, $(P-Q)(x)$ et $(P \times Q)(x)$ avec :

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \text{ et } Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x - 3$$

c. Remarque :

- Le polynôme nul est le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls.
- Le polynôme nul n'admet pas de degré réel.

VI. Racine d'un polynôme-factorisation d'un polynôme

A. Racine d'un polynôme :

Activité3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x - 2$

- 1) Calculer $P(1)$
- 2) Déterminer les réels a et b tels que $P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$

On a Dans l'activité $P(1) = 0$, On dit que 1 une racine de $P(x)$ ou zéro de $P(x)$

Définition :

On appelle racine d'un Polynômes la valeur a qui annule le Polynômes. a est une racine de $P(x)$ ssi $P(a) = 0$

Application : Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

- a) Vérifier que 2 et 3 sont deux racines de $P(x)$
- b) Soit $R(x)$ un polynôme tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x - 2)(x + 3) + R(x)$
 - 1) Quel est la nature de $R(x)$
 - 2) Déterminer $R(x)$

B. Factorisation d'un polynôme.

Activité : Soit α un réel

- 1) Prouver que si un polynôme est factorisable par $x - \alpha$ alors α est une racine de ce polynôme
- 2) Soit α un réel et P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 - a. Factoriser $P(x) - Q(x)$
 - b. En déduire que si α est une racine du polynôme alors il existe un polynôme Q dont on précisera le degré tel que pour tout réel x , $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

La loi du reste

Définition: Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x - a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$.
On a donc : $r = P(a)$

Résultat: Un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x - a)$ si le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est nul, c'est-à-dire si la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $P(a) = 0$

Exercices : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

- 1) Montrons que $P(x)$ est divisible par $x + 3$
- 2) Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x + 1$ et $x - 2$
- 3) Vérifier que $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$

On dit que $P(x)$ est écrite **sous forme de produit de binômes**

pratiques de factorisation d'un polynôme

1) Division euclidienne

On reprend l'exemple (exercice résolu précédent)

On a $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est divisible par $x + 3$

Cherchons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 3)Q(x)$

Le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 2$

D'où $P(x) = (x + 3)(x^2 - x - 2)$

On peut vérifier que $Q(2) = 0$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x - 2$

Factorisons $Q(x)$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

D'où la factorisation de $P(x)$ en produit de binômes **$P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$**

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$	$x + 3$
$-x^3 - 3x^2$	$x^2 - x - 2$
$-x^2 - 5x - 6$	
$x^2 + 3x$	
$-2x - 6$	
$2x + 6$	
00	
$x^2 - x - 2$	$x - 2$
$-x^2 + 2x$	$x + 1$
$0 + x + 2$	
$-x - 2$	
00	