Professeur : Rachid BELEMOU	Cours	Niveau : TCT - BIOF
Lycée : Oued Eddahab	Le produit scalaire	Année : 2017-2018

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel que l'on peut calculer de diverses façons. C'est cette diversité qui en fait un outil puissant.

A Expressions du produit scalaire

1. Définition

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
> Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel
> $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2)$

Conséquences

- Si *A*, *B* et *C* sont trois points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, on a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\vec{v}-\vec{u}$,
  d'où l'égalité $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$.
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$; $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

2. Avec des coordonnées

> Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$. On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ pour un vecteur $\vec{u}(x,y)$.

3. Formule du cosinus

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
> On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Démonstration

On considère un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ et les points A et B tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}=\|\vec{u}\|\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Les coordonnées polaires de B sont $(\|\vec{v}\|,(\vec{u},\vec{v}))$. On a donc :
$x_{\vec{u}}=\|\vec{u}\|$, $y_{\vec{u}}=0$, $x_{\vec{v}}=\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ et $y_{\vec{v}}=\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$ et on en déduit que
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Conséquence

> Si *A*, *B* et *C* sont trois points distincts,
> $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\widehat{BAC})$.

B Propriétés du produit scalaire

1. Règles de calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et les réels a et b :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
2. $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Démonstration

Utiliser la formule du produit scalaire utilisant des coordonnées.

2. Vecteurs colinéaires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

Démonstration

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, $(\vec{u},\vec{v})=0$, donc $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, $(\vec{u},\vec{v})=\pi$, donc $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

3. Vecteurs orthogonaux

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

On a alors $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=0$ et donc 3 possibilités :

1. $\|\vec{u}\|=0$, c'est à dire $\vec{u}=\vec{0}$
2. $\|\vec{v}\|=0$, c'est à dire $\vec{v}=\vec{0}$
3. $\cos(\vec{u},\vec{v})=0$, c'est à dire que $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u},\vec{v})=\frac{-\pi}{2}$.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est nul.

Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur.

Application

Dire que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires équivaut à dire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

4. Utiliser une projection orthogonale

On considère trois points A, B et C. On appelle H la projection orthogonale de C sur la droite (AB). On a alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Démonstration

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$. Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$, ce qui donne $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.