

## Produit scalaire : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

### Exercice 1 :

On considère les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que :  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ .

Calculer :

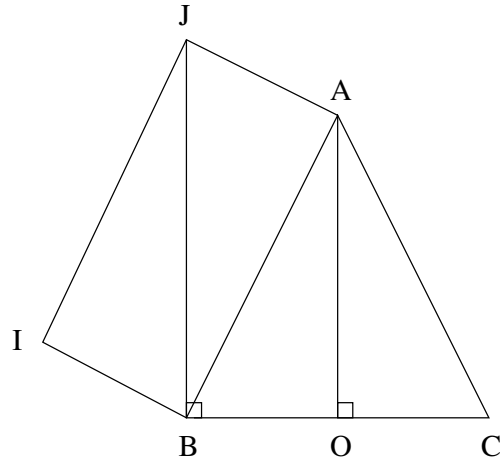
- 1)  $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
- 2)  $(\vec{u} + 2\vec{v})^2$
- 3)  $(-3\vec{u} + \vec{v})^2$
- 4)  $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2$

### Exercice 2 :

Dans la figure ci-dessous :  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$ ,  $AIBJ$  est un parallélogramme et  $BC = 4$ .

Calculer les produits scalaires suivants :

- 1)  $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$
- 2)  $\vec{BC} \cdot \vec{JC}$
- 3)  $\vec{BC} \cdot \vec{AJ}$
- 4)  $\vec{BC} \cdot \vec{IA}$
- 5)  $\vec{BO} \cdot \vec{BI}$
- 6)  $\vec{BC} \cdot \vec{CI}$

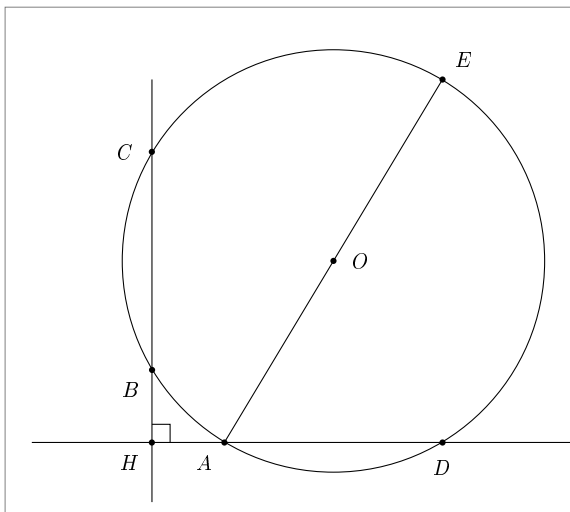


### Exercice 3 :

Soit  $C$  un cercle de centre  $O$  et  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points distincts de  $C$ .

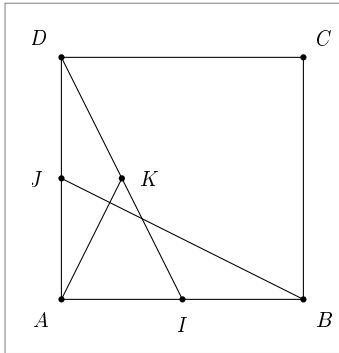
On note  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BC)$ ,  $D$  l'intersection entre la hauteur  $(AH)$  et le cercle  $C$  et  $E$  le point du cercle diamétralement opposé à  $A$ .

Montrer que  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AE} \cdot \vec{AH}$ .



### Exercice 4 :

Soit  $ABCD$  un carré,  $I$  le milieu de  $[AB]$ ,  $J$  le milieu de  $[AD]$  et  $K$  le milieu de  $[ID]$ .  
Montrer que les droites  $(AK)$  et  $(BJ)$  sont perpendiculaires.



### Exercice 5 :

On considère les points  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer une équation de la tangente en  $B$  au cercle  $C$  de centre  $A$  passant par  $B$ .
- Déterminer une équation du cercle  $C$ .

### Réponses exercice 1 :

On développe et on utilise que  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4$ ,  $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ .

- $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -2$
- $(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = 44$
- $(-3\vec{u} + \vec{v})^2 = 39$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2 = -4$

### Réponses exercice 2 :

- $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{BQ} = 4 \times 2 = 8$
- $\vec{BC} \cdot \vec{JC} = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = 4^2 = 16$
- $\vec{BC} \cdot \vec{AJ} = \vec{BC} \cdot \vec{OB} = -4 \times 2 = -8$
- $\vec{BC} \cdot \vec{IA} = \vec{BC} \cdot (\vec{IB} + \vec{BA}) = \vec{BC} \cdot \vec{IB} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{JA} + 4 \times 2 = 4 \times 2 + 8 = 16$
- $\vec{BO} \cdot \vec{BI} = \vec{BO} \cdot \vec{AJ} = \vec{BO} \cdot \vec{OB} = -2^2 = -4$
- $\vec{BC} \cdot \vec{CI} = \vec{BC} \cdot (\vec{CB} + \vec{BI}) = \vec{BC} \cdot \vec{CB} + \vec{BC} \cdot \vec{BI} = -4^2 + \vec{BC} \cdot \vec{AJ} = -16 - 4 \times 2 = -24$

### Réponses exercice 3 :

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AH} \cdot \vec{AD} = \text{car } \vec{AB} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{AH} \text{ sur } (AD).$

$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AH} \cdot \vec{AD} = \text{car } \vec{AC} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{AH} \text{ sur } (AD).$

Donc, on a bien  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$ .

De plus,  $\vec{AE} \cdot \vec{AH} = (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot \vec{AH} = \vec{AD} \cdot \vec{AH} + \vec{DE} \cdot \vec{AH} = \vec{AD} \cdot \vec{AH} + 0$  (le triangle  $ADE$  est rectangle en  $D$ ).

Conclusion :  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AE} \cdot \vec{AH}$ .

Réponses exercice 4 :

$$\vec{AK} \cdot \vec{BJ} = (\vec{AJ} + \vec{JK}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AJ}) = (\vec{AJ} + \frac{1}{2}\vec{AI}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AJ})$$

$$\vec{AJ} \cdot \vec{BA} + \vec{AJ} \cdot \vec{AJ} + \frac{1}{2}\vec{AI} \cdot \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = 0 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + 0 = 0$$

Les droites  $(AK)$  et  $(BJ)$  sont bien perpendiculaires.

Réponses exercice 5 :

a)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de la tangente qui admet donc une équation de la forme :  $-3x + 2y + c = 0$ .

La tangente doit passer par  $B$ . On en déduit que  $-3 \times (-1) + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$ .

Une équation de la tangente est donc :  $-3x + 2y - 9 = 0$ .

b) Le rayon du cercle est égal à la distance  $AB$ . Or,  $AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ .

Une équation du cercle est donc  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 13$ , c'est à dire  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ .