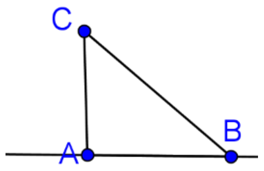
PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 :Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et $AB = 2cm$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$

Solution :



On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AA}$ car :

A est le projeté orthogonales de A sur (AB) et B est le projeté orthogonales de B sur (AB)

et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AA = AB \times 0 = 0$

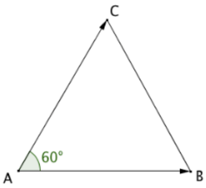
de même On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BA = 2 \times 2 = 4$

de même On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = -BA \times AB = -2 \times 2 = -4$

Exercice2 : Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution :

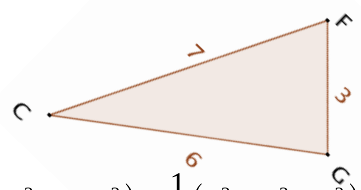


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos BAC$$

$$= a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Exercice3 :Soit CFG un triangle tel que $CF = 7$ et $CG = 6$ et $FG = 3$

Calculer : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$



Solution :

$$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - GF^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right) = 38$$

Exercice4 :soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\left\|\vec{u}\right\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ et $\left\|\vec{v}\right\| = 4$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Solution :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Exercice5 : Soit EFG un triangle tel que : $EF = 5$ $EG = 3$ et $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = -6$ calculer : $\cos\left(FEG\right)$

Solution : $\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{EG} = \left\|\overrightarrow{EF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EG}\right\| \cos\left(FEG\right) = -6$

Ssi $EF \times EG \cos\left(FEG\right) = -6$ ssi $5 \times 3\cos\left(FEG\right) = -6$

Ssi $\cos\left(FEG\right) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

Exercice6 : Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$ $AC = 4$ et $BAC = \frac{2\pi}{3}$

Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\hat{A} = AB \times AC\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 3\cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 3\cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Car : $\cos\left(\pi - x\right) = -\cos x$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6$

Exercice7 :**1)** Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Calculer AH

2) sachant que $\left\|\vec{u}\right\| = 4$ et $\left\|\vec{v}\right\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}$

a)Calculer : $A = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right).\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right)$ et $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right).\left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$

$C = \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2$ et $D = \left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right)^2$

b)en déduire $E = \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|$ et $F = \left\|2\vec{u} + 3\vec{v}\right\|$

Solution :

1) Calcule de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 - 7^2 - 5^2\right) = -19$$

donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -19$

donc :On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 19$

a) Calcule de AH

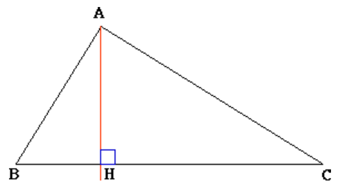
On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ donc : $AH = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$

2) a) $A = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right).\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) = 2\vec{u}.\vec{u} + 4\vec{u}.\vec{v} - 3\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}.\vec{v}$

$$A = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right).\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) = 2\vec{u}.\vec{u} + 4\vec{u}.\vec{v} - 3\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}.\vec{v}$$

$$A = 2\vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}^2 = 2.\left\|\vec{u}\right\|^2 + \vec{u}.\vec{v} - 6\left\|\vec{v}\right\|^2 = 2 \times 4^2 + \frac{1}{2} - 6 \times 2^2$$

$A = 32 + \frac{1}{2} - 24 = \frac{15}{2}$



$$B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right).\left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right) = \frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}$$

$$B = \frac{1}{2}\times\|\vec{u}\|^2 - \frac{3}{4}\times\vec{u}.\vec{v} - \frac{1}{2}\times\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}\times 4^2 - \frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\times 2^2$$

$$B = 8 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{51}{8}$$

$$C = \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2^2$$

$$C = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$D = \left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right)^2 = 4\vec{u}^2 + 12\vec{u}.\vec{v} + 9\vec{v}^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u}.\vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$$

$$D = 4\times 4^2 + 12\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\times 2^2 = 64 - 6 + 36 = 94$$

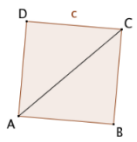
b) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = 21$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 94$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{21}$

$\left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right)^2 = 94$ donc $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 94$ donc

$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \sqrt{94}$

Exercice8 : Soit un carré ABCD de côté c.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Solution :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$

Exercice9 : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

Montrer que :

1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

2) $AC\times AB = AH\times BC$

Solution :1)

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

On a : $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC}$ car ABC un triangle rectangle en A

Donc : $BC^2 = BA^2 + AC^2$

2) on considére le triangle : (ABC) donc : $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$

Et on considére le triangle : (ABH) donc : $\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB}$

Donc : $\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB}$ donc : $AC\times AB = AH\times BC$

Exercice10 : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

et $AH = 2cm$ et $ABC = \frac{\pi}{3}$

Calculer AB et BH et BC

Réponse :

a)On a ABH un triangle rectangle en H

donc : $\sin\left(ABC\right) = \frac{AH}{AB}$

Donc : $AB = \frac{AH}{\sin\left(ABC\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

b)On a $AB^2 = AH^2 + HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

Donc: $AB^2 - AH^2 = HB^2$ Donc: $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 = HB^2$

Donc: $\frac{16}{3} - 2^2 = HB^2$ Donc: $HB^2 = \frac{4}{3}$

$HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

c)On a $BA^2 = BH\times BC$ Donc: $BC = \frac{BA^2}{BH}$

Donc: $BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

Exercice11 : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et $AC = 8$ et $A = \frac{2\pi}{3}$ Calculer BC et $\cos C$

Réponse :

a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos A$

$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 5\times 8\cos\frac{2\pi}{3}$ donc

$BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129$ donc $BC = \sqrt{129}$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA\times CB\cos C$ donc

$2CA\times CB\cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$

donc $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA\times CB}$ donc

$\cos C = \frac{64 + 129 - 25}{2\times 8\times\sqrt{129}} = \frac{168}{16\sqrt{129}} = \frac{21\sqrt{129}}{258}$

Exercice12 : Soit EFG un triangle tel que et $EF = 7$ et $EG = 5$ et $FEG = \frac{\pi}{4}$

Calculer FG et $\cos EGF$

Exercice13 : Soit ABC un triangle tel que et $BC=4cm$ $AC=6cm$ et $AB=3cm$ et I le milieu du segment $[BC]$

Calculer : AI

Réponse : D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC on a :

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $3^2+6^2=2AI^2+\frac{1}{2}4^2$ donc : $9+36=2AI^2+\frac{16}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{37}{2}$ par suite : $AI=\sqrt{\frac{37}{2}}$

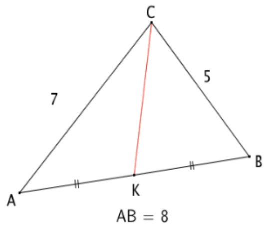
Exercice14: Soit ABC un triangle tel que : $BC=5$; $AC=7$ Et $AB=8$ et K le milieu du segment [AB].

calculer CK.

Réponse : D'après le théorème de la médiane, on a :

$$CA^2+CB^2=2CK^2+\frac{AB^2}{2}$$

donc :



$$CK^2=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\frac{AB^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(7^2+5^2-\frac{8^2}{2}\right)=21$$

Donc : $CK=\sqrt{21}$.

Exercice15 : soit ABM un triangle tel que : $AM=3cm$ Et $BM=4cm$ et $AB=4cm$

I le milieu du segment [AB]. Et J le milieu de $[AM]$

Et K le milieu du segment $[BM]$

Calculer : MI et AK et BJ

Réponse :1) calcul de MI

D'après le théorème de la médiane dans ABM on a :

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ donc $3^2+4^2=2MI^2+\frac{1}{2}4^2$

Donc : $9+16=2MI^2+\frac{16}{2}$ donc : $MI^2=\frac{17}{2}$ donc : $MI=\sqrt{\frac{17}{2}}$

calcul de AK

D'après le théorème de la médiane dans ABM

Donc : $AB^2+AM^2=2AK^2+\frac{1}{2}BM^2$

Donc : $2^2+3^2=2AK^2+\frac{1}{2}4^2$ donc : $AK^2=\frac{17}{2}$ donc : $AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$

calcul de BJ

D'après le théorème de la médiane dans ABM

Donc : $AB^2+BM^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AM^2$

Donc : $4^2+4^2=2BJ^2+\frac{1}{2}3^2$

Donc : $\frac{55}{2}=2BJ^2$ donc : $BJ^2=\frac{55}{4}$ donc : $BJ=\frac{\sqrt{55}}{2}$

Exercice16 : Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et $EF=3$ et $EH=5$ et $FEH=\frac{3\pi}{4}$

Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$

Réponse : a)

$$S_{EFH}=\frac{1}{2}EF\times EH\sin E=\frac{1}{2}3\times 5\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{15}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

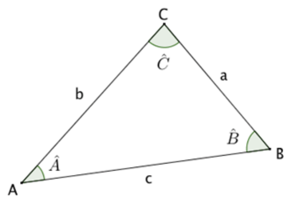
$$S_{EFH}=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$$

b) $S_{EFGH}=2\times S_{EFH}=2\times\frac{15}{4}\sqrt{2}=\frac{15}{2}\sqrt{2}$

Exercice17 :: Soit ABC un triangle tel que :

$a=BC=6$ et $A=30°$ et $B=73°$

Calculer b et c



Réponse

D'après la formule de sinus on a :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 30°}{6}=\frac{1}{12}$ donc $\frac{\sin 73°}{b}=\frac{1}{12}$ donc $b=12\sin 73°=11.47$

$\frac{\sin 77°}{c}=\frac{1}{12}$ donc $c=12\sin 77°=11.69$

Exercice18 : soit ABC un triangle tel que : $AB=1$ Et $AC=\sqrt{2}$ et $CB=2$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$
2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD
4) Calculer : AD
5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Calculer : AI et BJ

Réponse :1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $2^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ donc : $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

Déduction de $\cos A$: on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ donc : $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$

Donc : $\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

Donc : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ par suite : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

Et donc : ABD est un triangle rectangle en A

4)on a : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

donc : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$ donc :

$AD^2=\frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}\left(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times 2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$

Donc : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a)D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ donc $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

Ssi $3=2AI^2+2$ ssi $1=2AI^2$ ssi $AI^2=\frac{1}{2}$ ssi $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$ ssi $5=2BJ^2+1$

Ssi $BJ^2=2$ ssi $BJ=\sqrt{2}$

Exercice19: soit ABC un triangle tel que : AB = $\sqrt{7}$
Et AC= 2 et BC= 3
I le milieu du segment $[BC]$

- a)Calculer : $\cos(B\hat{A}C)$

b)Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$
c) Calculer AI

2) soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$

b)montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
c)que peut-on déduire des droites : (MB)et (AC) ?

Réponse :1)a)
D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $9=4+7-4\sqrt{7}\cos(A)$

Donc : $-2=-4\sqrt{7}\cos(A)$ donc :

$\cos(A)=\frac{2}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$

1)b) on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{14}{14}=1$

1)c) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

Donc : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

Donc : $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ donc $AI^2=\frac{13}{4}$ Donc : $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

2)a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times 4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

2)b) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

2)b)donc : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MB)\perp(AC)$

Exercice20 : soit ABC un triangle tel que $AB=1$
Et $BC=AC=\sqrt{2}$
I le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que :
$\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1)calculer CI

2)calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4)en déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ et en déduire $\cos BAC$

5)calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD

6)soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

a) calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

b)montrer que $(MD)\perp(AC)$

Réponse :1) a)D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ donc : $\frac{7}{4}=CI^2$ donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ssi $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$ et ABC isocèle en C

Donc : $(IC)\perp(AB)$ cad $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos 0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Calcul de : $\cos BAC$

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Ssi $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ ssi $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ssi $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5)on a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Ssi $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ssi $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=$
$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

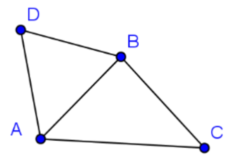
$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$ ssi $=-\frac{7}{4}\cdot 2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MD)\perp(AC)$

Exercice21 : soit ABC un triangle isocèle en B tel que $AB=\sqrt{2}$
On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatérale ABD (voir schéma)

1)calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2) calculer : AC et DC



3)montrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4)verifier que : $DAC=\frac{7\pi}{12}$

5)en déduire : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Réponse :1)

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

- D'après Pythagore on a : $AC^2=BC^2+AB^2$

$AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ ssi $AC^2=4$ ssi $AC=2$
D'après le Théorème d'Al Kashi dans BCD on a :

$DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$DC^2=2+2-2\times 2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$

$DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

- D'après le Théorème d'Al Kashi dans ACD on a :

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Ssi $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Ssi $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $DAC=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$ donc : $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice22 : soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ et I un point tel que :

$\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1)Construire une figure

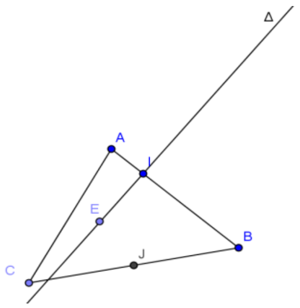
2)montrer que : $AB=8$ et calculer BC

3)calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) calculer : AJ

Solution :1)



2)on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ donc $AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

Donc : $AB=8$: donc $AB^2=64$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ donc : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

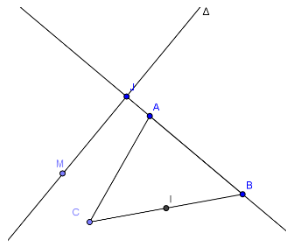
Donc : $128=2AJ^2+48$ donc : $40=AJ^2$ donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice23 : soit ABC un triangle isocèle en B tel que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ et $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$ et J un point tel que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par J et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

Et soit $M\in(\Delta)$

1)Construire une figure



2)montrer que : $AB=6$ et calculer AC

3)calculer : $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$

5) calculer : BI

Solution :1) on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$

Donc : $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\hat{B}=12$

Donc : $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ donc : $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

Donc : $AB^2=36$ donc : $AB=6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B$

Donc : $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$

Donc : $AC^2=54$ donc : $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$

donc : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72=2BI^2+27$ donc : $BI^2=\frac{45}{2}$

Donc : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien