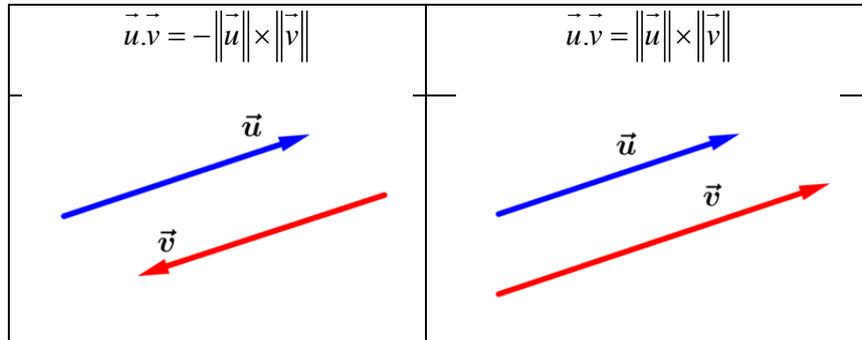


## I. Définition du produit scalaire de deux vecteurs

### 1. Cas de deux vecteurs colinéaires

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs colinéaires. On appelle **produit scalaire** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le

réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$



### Exemple

- Lorsque l'un des deux vecteur  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

C'est-à-dire :

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par lui-même  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est appelé « carré scalaire de  $\vec{u}$  » et est noté  $\vec{u}^2$ .

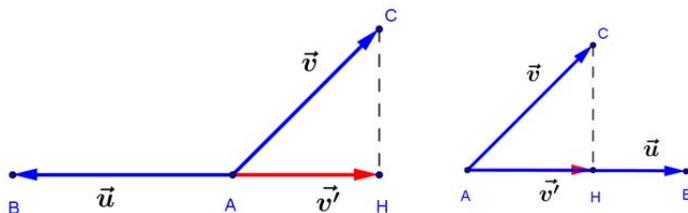
Par définition,  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$  ; donc, pour deux points A et B, on a  $\overline{AB}^2 = AB^2$

### 2. Cas général

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls A, B et C, trois points tels que:

$\overline{AB} = \vec{u}$  et  $\overline{AC} = \vec{v}$  et soit H la projection orthogonale de C sur (AB) et  $\vec{v}' = \overline{AH}$ .

On pose, par définition :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$  ( $\vec{u}$  et  $\vec{v}'$  sont colinéaires)

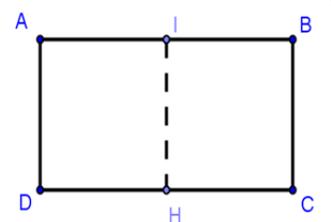


### Exemple :

ABCD un rectangle tel que  $AB = 6$  et  $BC = 4$ , soient I, le milieu de  $[AB]$  et H son projeté orthogonal sur (CD)

Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} ; \overline{AB} \cdot \overline{CB} ; \overline{DI} \cdot \overline{DC}$$



### Réponse :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = AB^2 = 36 ; \overline{AB} \cdot \overline{CB} = \overline{AB} \cdot \overline{BB} = 6 \times 0 = 0 ; \overline{DI} \cdot \overline{DC} = \overline{DH} \cdot \overline{DC} = 3 \times 6 = 18$$

## II. Propriétés du produit scalaire

### 1. Orthogonalité et produit scalaire

si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux ou l'un d'entre eux est nul, alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**Définition :**

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ signifie } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

**2. Propriétés algébriques**

❖ Quels que soit les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  et le nombre réel  $\alpha$  :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (on dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  signifie que  $\vec{u} = \vec{0}$

❖ Produits scalaire remarquables

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

❖ Autre expression du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

**III. Forme géométrique du Produit scalaire****Propriété**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du plan tels que :  $A \neq B$  et  $A \neq C$ , on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

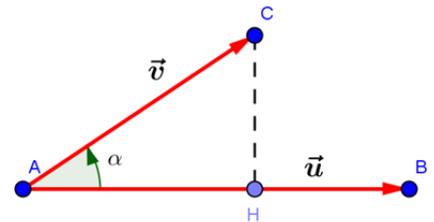
Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Exemples: soit  $\alpha$  une mesure en radian de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ .

Si  $\|\vec{u}\| = 4$  et  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = 4 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 6$

Si  $\|\vec{u}\| = 5$  et  $\|\vec{v}\| = 2$  et  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = 5 \times 2 \times \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) = -5\sqrt{2}$



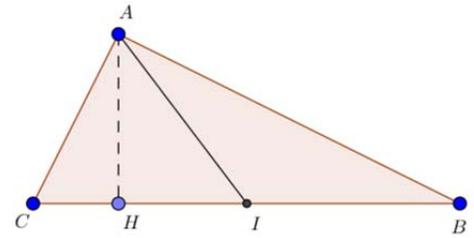
## IV. Application du produit scalaire

### 1. Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  et  $H$  le projeté orthogonale de  $A$  sur  $(BC)$  et  $I$  le milieu de  $[BC]$ , on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad ; \quad AI = \frac{1}{2}BC \quad ; \quad BA^2 = BH \times BC \quad ;$$

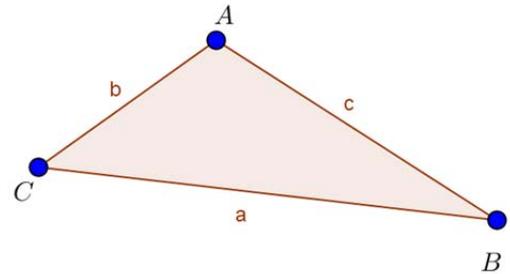
$$CA^2 = CH \times CB \quad ; \quad AH^2 = HB \times HC$$



### 2. Théorème d'Al Kashi

Soit  $ABC$  un triangle on a :

- $BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2BA \times CA \times \cos \hat{A}$
- $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos \hat{C}$
- $CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times \cos \hat{B}$



### 3. Théorème de la médiane

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

Pour tout point  $M$  du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

