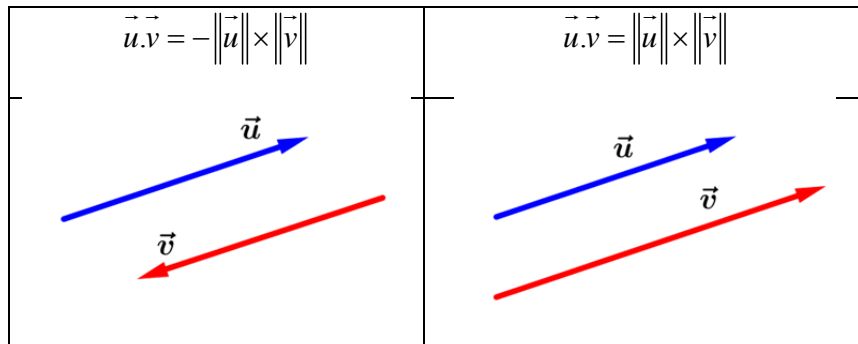


I. Définition du produit scalaire de deux vecteurs

1. Cas de deux vecteurs colinéaires

Soit \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires. On appelle **produit scalaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le

réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$



Exemple

- Lorsque l'un des deux vecteur \vec{u} ou \vec{v} est nul on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

C'est-à-dire :

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Le produit scalaire de \vec{u} par lui-même $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé « carré scalaire de \vec{u} » et est noté \vec{u}^2 .

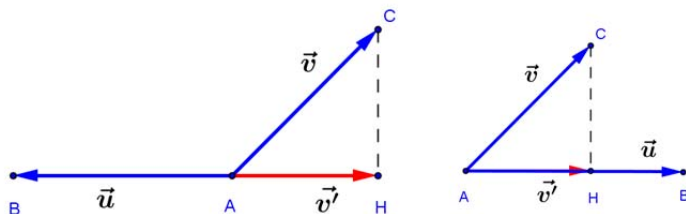
Par définition, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$; donc, pour deux points A et B, on a $\overline{AB}^2 = AB^2$

2. Cas général

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls A, B et C, trois points tels que:

$\overline{AB} = \vec{u}$ et $\overline{AC} = \vec{v}$ et soit H la projection orthogonale de C sur (AB) et $\vec{v}' = \overline{AH}$.

On pose, par définition : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$ (\vec{u} et \vec{v}' sont colinéaires)

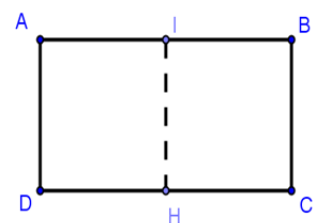


Exemple :

ABCD un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 4$, soient I, le milieu de $[AB]$ et H son projeté orthogonal sur (CD)

Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} ; \overline{AB} \cdot \overline{CB} ; \overline{DI} \cdot \overline{DC}$$



Réponse :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = AB^2 = 36 ; \overline{AB} \cdot \overline{CB} = \overline{AB} \cdot \overline{BB} = 6 \times 0 = 0 ; \overline{DI} \cdot \overline{DC} = \overline{DH} \cdot \overline{DC} = 3 \times 6 = 18$$

II. Propriétés du produit scalaire

1. Orthogonalité et produit scalaire

si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux ou l'un d'entre eux est nul, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Définition :

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ signifie } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

2. Propriétés algébriques

❖ Quels que soit les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} et le nombre réel α :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ signifie que $\vec{u} = \vec{0}$

❖ Produits scalaire remarquables

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

❖ Autre expression du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

III. Forme géométrique du Produit scalaire**Propriété**

Soient A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $A \neq C$, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

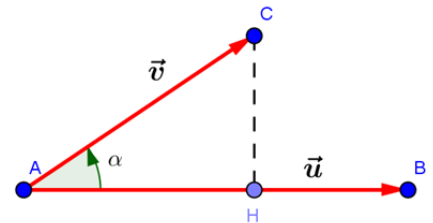
Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Exemples: soit α une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Si $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = 4 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 6$

Si $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = 5 \times 2 \times \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) = -5\sqrt{2}$



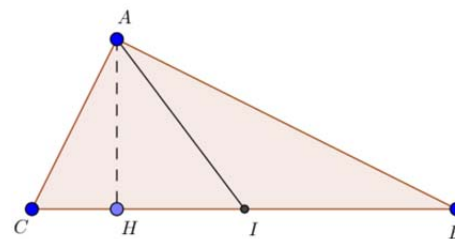
IV. Application du produit scalaire

1. Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I le milieu de $[BC]$, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad ; \quad AI = \frac{1}{2}BC \quad ; \quad BA^2 = BH \times BC \quad ;$$

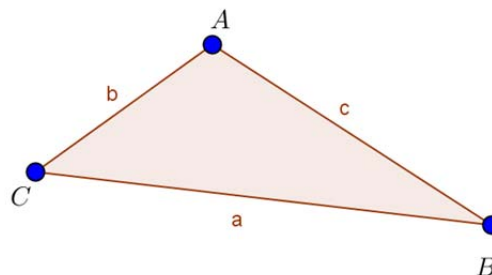
$$CA^2 = CH \times CB \quad ; \quad AH^2 = HB \times HC$$



2. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle on a :

- $BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2BA \times CA \times \cos \hat{A}$
- $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos \hat{C}$
- $CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times \cos \hat{B}$



3. Théorème de la médiane

Soient A et B deux points distincts du plan et I est le milieu de $[AB]$.

Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

