

## Chapitre 5

# PROJECTION D'UN POINT SUR UNE DROITE PARALLELEMENT à UNE AUTRE DROITE

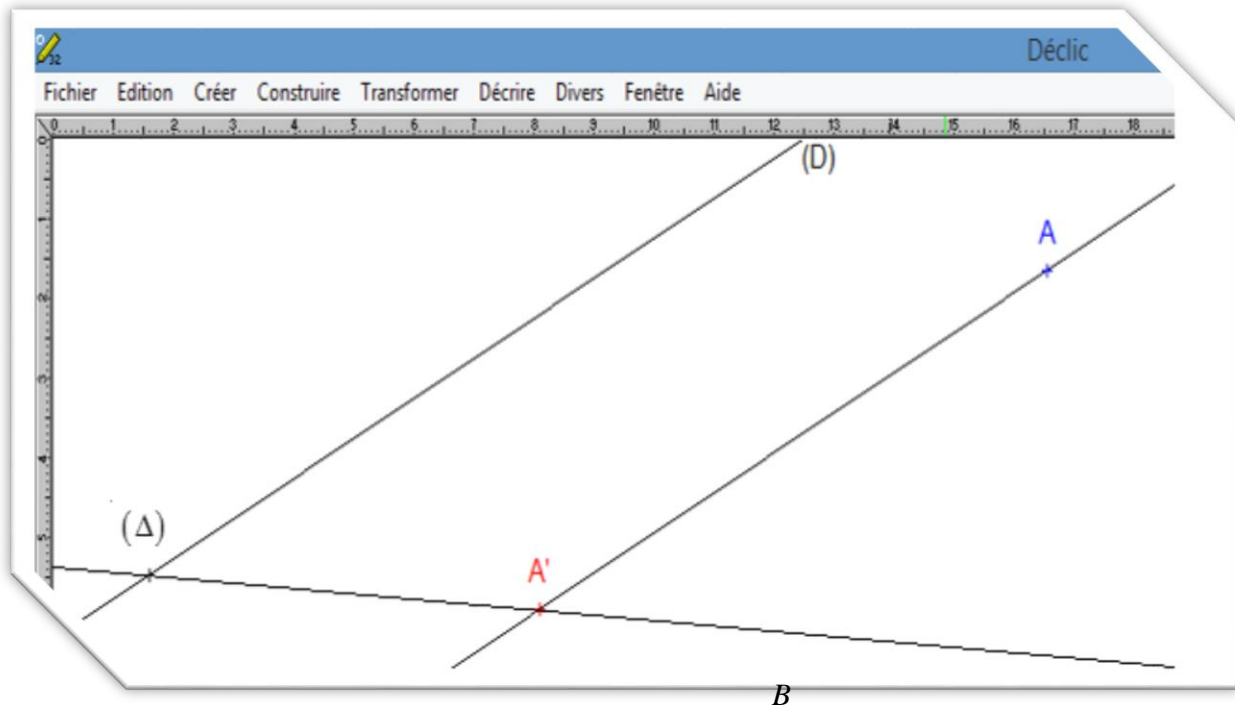
### Compétences exigibles

- i. Définition
- ii. Théorème de Thales
- iii. Conservation de coefficient de colinéarité de 2 vecteurs

## 1 projection d'un point sur une droite parallèlement à une autre droite

### Activité 1

On suppose les fils des rayons du soleil prennent la direction de la droite  $(D)$  et la droite  $(\Delta)$  représente la surface du sol. L'ombre du point  $A$  sur le sol est le point  $A'$  l'intersection de la droite  $(\Delta)$  avec la droite passant par  $A$  et parallèlement à la droite  $(D)$ . ( voir figure ci contre).



## 2\_ Vocabulaire

- Le point  $A'$  est appelé **projection du point  $A$  sur  $(\Delta)$  parallèlement à  $(D)$** .
- $B \in (\Delta)$  :  $B$  est son propre projeté sur  $(\Delta)$  parallèlement à  $(D)$ .

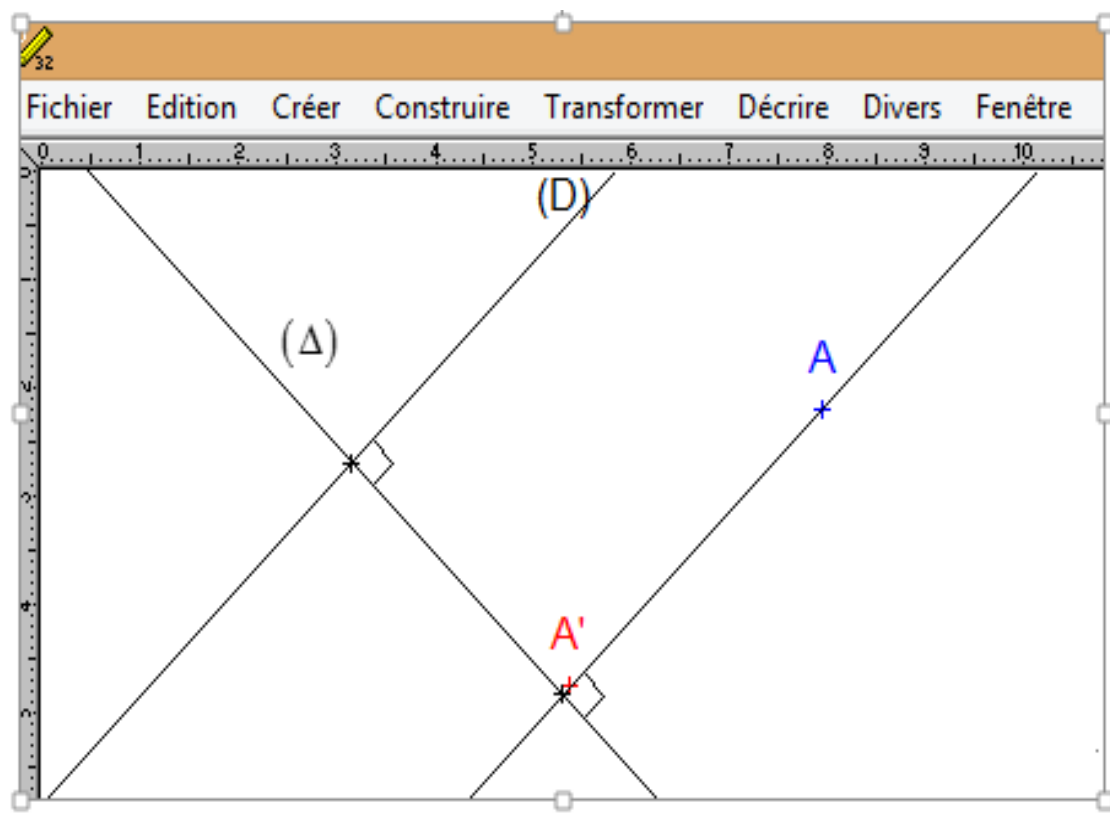
### 3\_ Définition :

Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites sécantes et  $M$  un point du plan tel que  $M \notin (\Delta)$ .

Dire que le point  $M'$  est la projection du point  $M$  sur  $(\Delta)$  parallèlement à  $(D)$  veut dire :  $M' \in (\Delta)$  et  $(MM') \parallel (D)$ .

### Cas particulier :

Si  $(D) \perp (\Delta)$  :  $A'$  est la projection orthogonale de  $A$  sur  $(\Delta)$ .



### 4\_ Application :

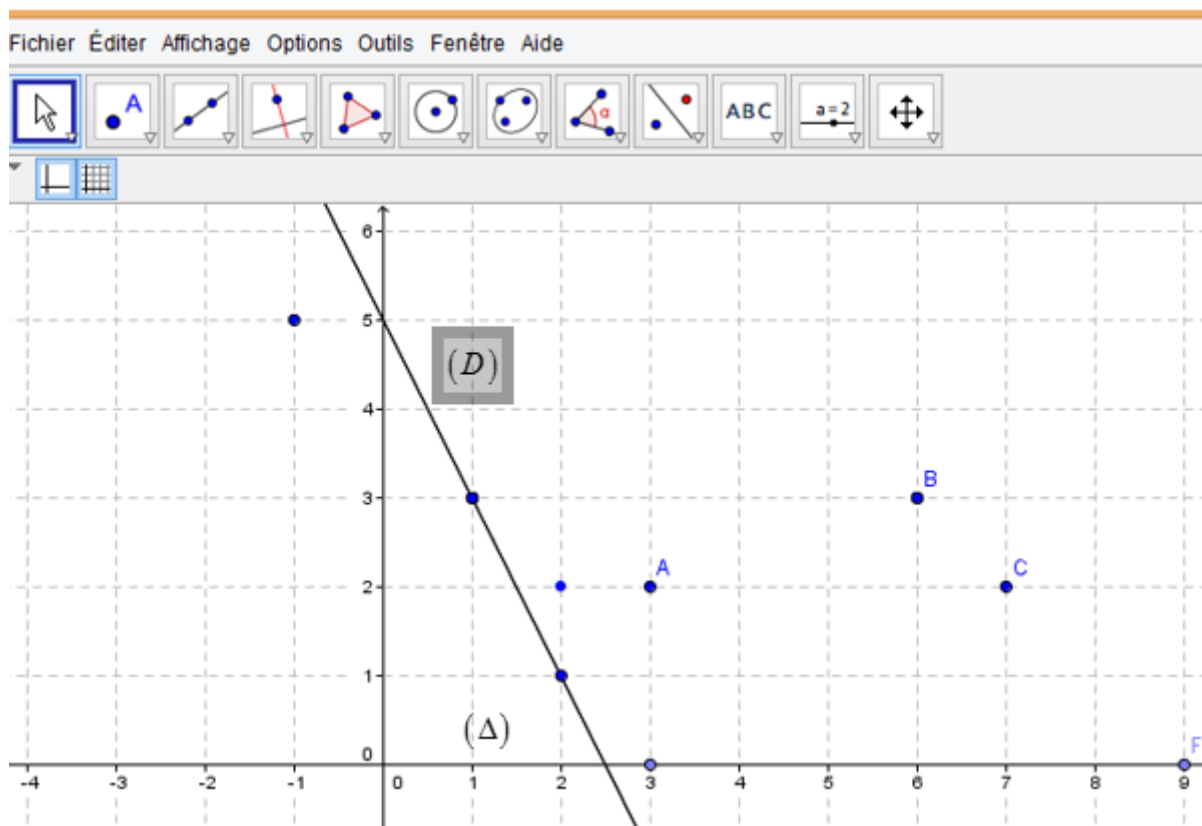
**On considère ( la figure ci contre)**

**Des points  $B, C, F$  sont alignés.**

**La droite  $(BC)$  est parallèle à  $(D)$ .**

**Les points  $E$  et  $F$  appartiennent à  $(\Delta)$ .**

- I. Déterminer les projections des points  $A, B, C, E, F$  sur  $(\Delta)$  parallèlement à  $(D)$ .**
- II. Représenter les projections des points  $A, B, C, E, F$  sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$ .**
- III. Déterminer l'ensemble des points du plan dont la projection sur  $(\Delta)$  parallèlement à  $(D)$  est le point  $F$ .**
- IV. Construire le point  $M$  tel que le point  $E$  est sa projection  $(\Delta)$  parallèlement à  $(D)$  et que le quadrilatère  $ECFM$  soit un parallélogramme.**



## ii\_ Theoreme de Thalès

➤ **Théorème de Thalès direct :**

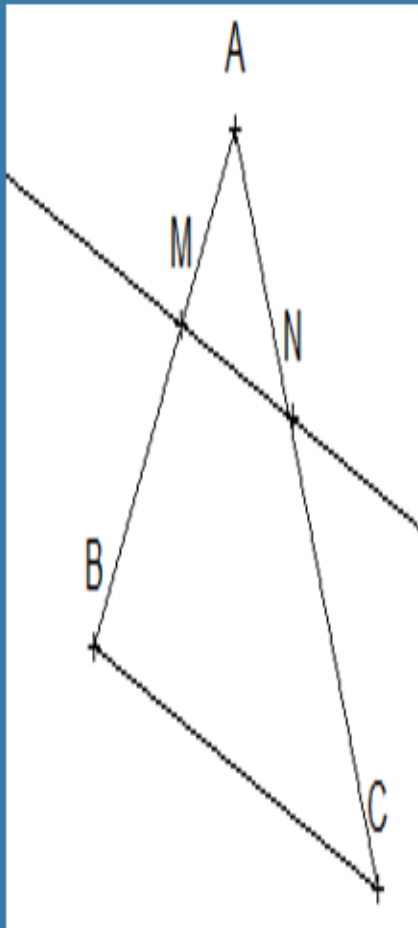
\*  $A, B, M$  trois points alignés

\*  $A, N, C$  trois points alignés

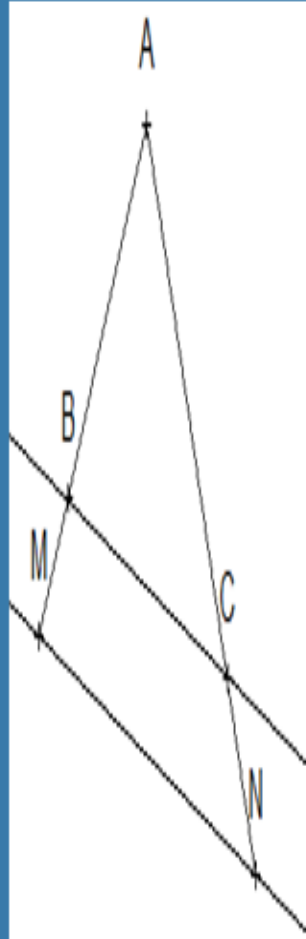
\*  $(MN) \parallel (BC)$

donc  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

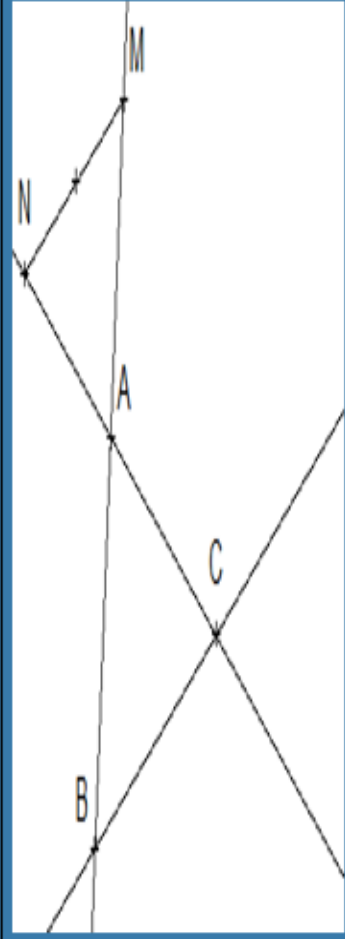
**1 cas**



**2 cas**



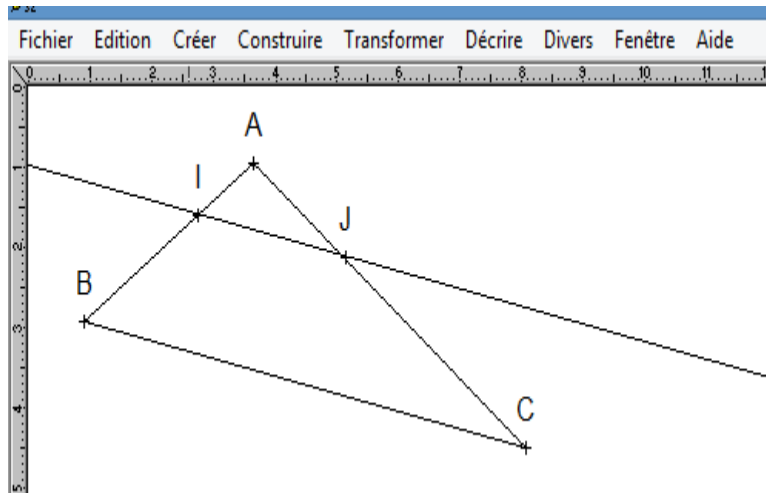
**3 cas**



**Application :**

$$\mathbf{ABC} \text{ triangle tel que : } \begin{cases} (IJ) \parallel (BC) \\ AI = 6 \text{ cm}; AB = 18 \text{ cm}; IJ = y \text{ cm} \\ AJ = 5 \text{ cm}; AC = x \text{ cm}; BC = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

**Voir figure**



1. Enoncer le théorème de Thales

2. A partir de l'égalité  $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$  vérifier que  $x = 19 \text{ cm}$

3. A partir de l'égalité  $\frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BC}$  vérifier que  $IJ = 4 \text{ cm}$

➤ **Réciproque du théorème de Thalès**

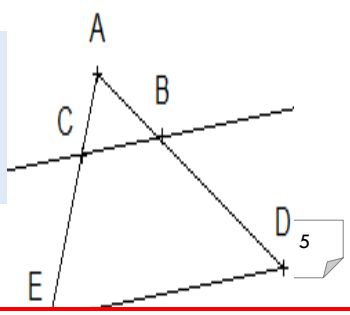
( méthode pour prouver si 2 droites sont parallèles

\*  $A, M, B$  points alignés  
 \*  $A, N, C$  points alignés  
 \*  $A, M, B$  sont dans le même ordre que  $A, N, C$     **conclusion :**  $(MN) \parallel (BC)$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

**Exercice résolu**

$ADE$  un triangle telque  $\begin{cases} B \in [AD]; C \in [AB] \\ AB = 4 \text{ cm}; AD = 6 \text{ cm} \\ AC = 6 \text{ cm}; AE = 9 \text{ cm} \end{cases}$  voir figure :



**Montrons que :**  $(BC) \parallel (DE)$

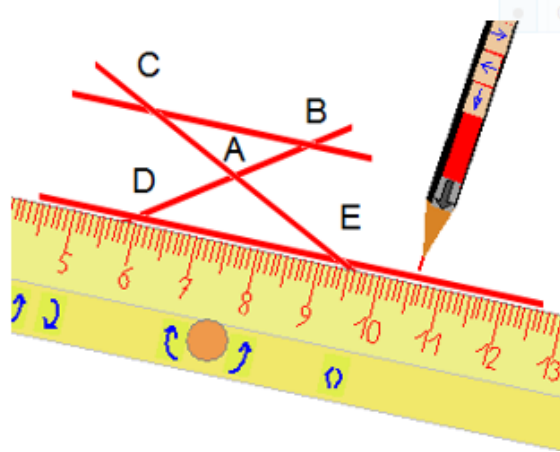
**On a :** **donc**

**ona :**  $\left\{ \begin{array}{l} * A, B, D \text{ sont alignes} \\ * A, C, E \text{ sont alignes} \\ * A, B, D \text{ sont dans le meme ordre que } A; C; E \\ * \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$

**donc :**  $(BC) \parallel (ED)$  **d'après la réciproque du théorème de Thalès**

**exercice :** (voir figure ci contre) **montrer que**  $(BC) \parallel (DE)$

$$\begin{cases} AB=4,5cm ; AC=30cm \\ AD=33cm ; AE=22cm \end{cases}$$



### III\_ Conservation du coefficient de colinéarité de 2 vecteurs

#### **Activité :**

Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites sécantes en  $A$ . Les points  $M, N, P$  appartiennent à  $(\Delta)$  talque :  $\overline{AM} = 2\overline{AC}$  ;  $\overline{AN} = 5\overline{AC}$  ;  $\overline{AP} = -3\overline{AC}$  et les points  $M', N', P'$  sont les projections respectives des points  $M, N, P$  sur  $(\Delta)$  parallèlement à  $(BC)$ .

1. Faire une figure géométrique
2. En utilisant le théorème de Thalès établir que :

$$\frac{AM'}{AB} = 2 ; \frac{AN'}{AB} = 5 ; \frac{AP'}{AB} = 3$$

3. En deduire que  $\overline{AM'} = 2\overline{AB}$  ;  $\overline{AN'} = 5\overline{AB}$  ;  $\overline{AP'} = -3\overline{AB}$

Si  $M \in (\Delta)$  et  $M'$  son projeté sur  $(D)$  parallèlement à  $(BC)$  telque  $\overline{AM} = \alpha \overline{AC}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Quelle conjecture peut-on dire à propos des 2 vecteurs  $\overline{AM}$  et  $\overline{AB}$ .

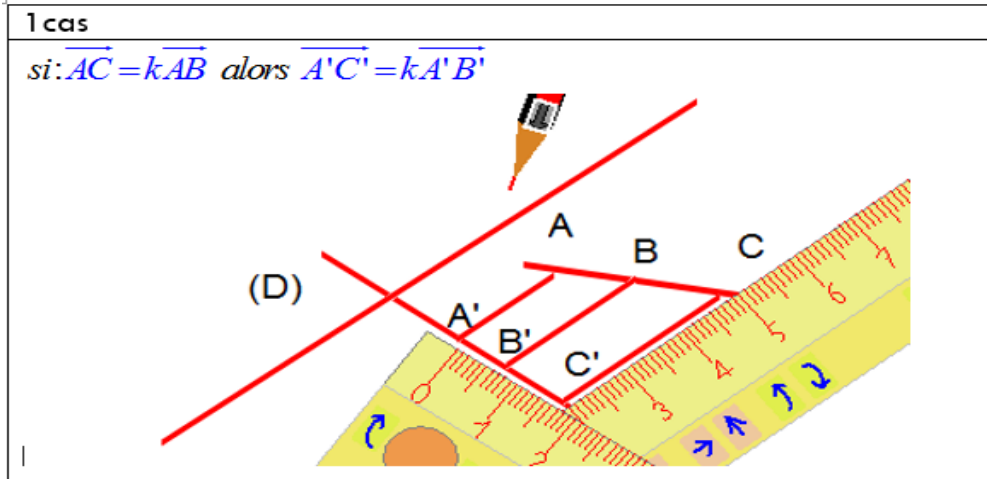


**regle :**  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites sécantes.

$A, B, C, D$  des points du plan et  $A', B', C', D'$  leurs projections (resp) sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$ .

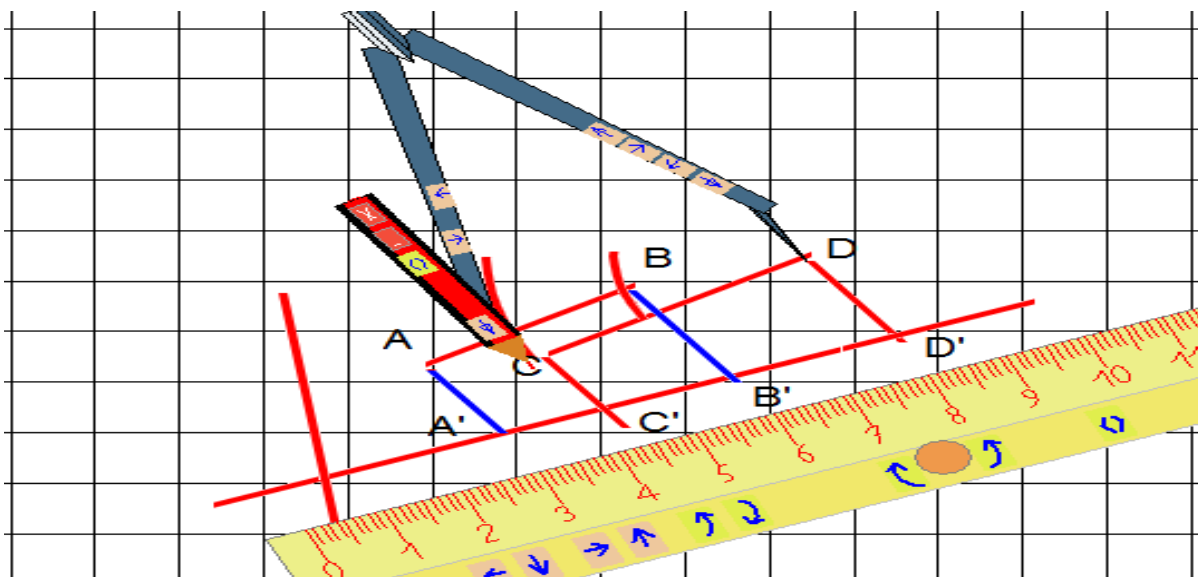
Si  $\overline{AB} = k \overline{AC}$  alors  $\overline{A'B'} = k \overline{A'C'}$

Si  $\overline{CD} = k \overline{AB}$  alors  $\overline{C'D'} = k \overline{A'B'}$

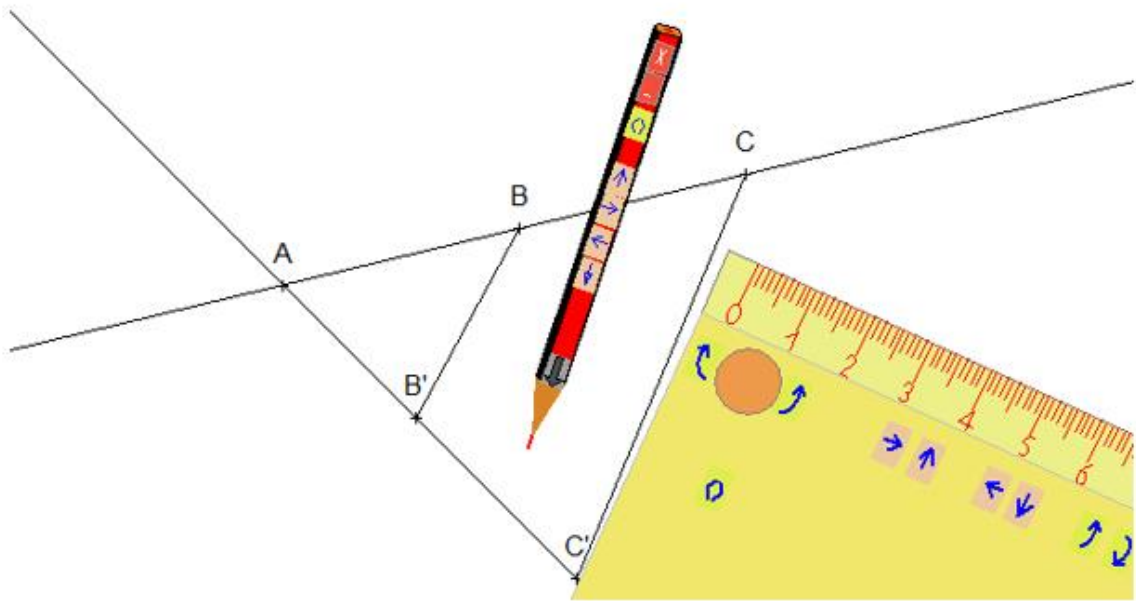


2 cas :

Si :  $\overline{CD} = k \overline{AB}$  alors  $\overline{C'D'} = k \overline{A'B'}$



3 cas : si  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$  alors  $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}$



### Exercice résolu :

Soit  $ABC$  un triangle et  $M \in [AB]$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $N$  le projeté de  $M$  sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$ .

**Montrons que :**  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

- ✓  $A$  est sa propre projection sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$
- ✓  $N$  est la projection de  $M$  sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$
- ✓  $C$  est la projection de  $B$  sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$

**Et comme**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  alors  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  **car la projection conserve le coefficient de colinéarité.**

