Niveau : Tronc Commun Bac International.

L'ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 01 :

Comparer les deux nombres a et b dans les cas suivants :

1) $a = 2-\sqrt{3}$ et $b = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

2) $a = 5+\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{25+10\sqrt{2}}$.

3) $a = \sqrt{10}$ et $b = \sqrt{3}+\sqrt{7}$.

4) $a = 4+\sqrt{17}$ et $b = 3\sqrt{2}+\sqrt{17}$.

5) $a = 4\sqrt{5}-\sqrt{79}$ et $b = 9-4\sqrt{5}$.

Exercice 02 :

1) Soit $a>0$ et $b<0$, posant $A = \dfrac{9a-4b}{3a-2b}$.

Montrer que : $2 < A < 3$.

2) Soit $a>0$ et $b>0$, posant $A = \dfrac{12a+10b}{3a+2b}$.

Montrer que : $4 < A < 5$.

Exercice 03 :

Soient a et b deux réels distincts strictement positifs.

1) Montrer que : $a^2+b^2 > 2ab$.

2) Montrer que : $\dfrac{2}{a^2+b^2} < \dfrac{1}{ab} < \dfrac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$.

3) Déduire que : $3{,}75 < \sqrt{15} < 4$.

Exercice 04 :

Soient a et b des nombres réels tels que :

$$-6 < a < 3 \text{ et } 5 < b < 9$$

Encadrer les nombres suivants :

$$ab \;;\; a^2 \;;\; b^2 \;;\; 3a^2+b^2-a+b.$$

Exercice 05 :

1) Ecrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :

$3 \le x \le 7$; $\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{5}{4}$; $-3 < x \le 0$; $-5 \le x < -8$; $x \ge 5$; $x \le 7$; $x > \dfrac{6}{11}$; $x < 0$.

2) Ecrire les intervalles suivantes sous forme d'inégalités :

$[2;5[$; $]-2;+\infty[$; $]-\infty;0]$; $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$; $]4;5[$; $]-3;3]$.

Exercice 06 :

Simplifier :

$]-3;4[\cap[2;7[$; $[-8;4[\cap[10;20[$; $]-\infty;1[\cap\left[\dfrac{-7}{4};+\infty\right[$

$]5;9[\cup[4;8[$; $[-5;-2[\cup[-3;+\infty[$; $\left]-\infty;\dfrac{2}{7}\right[\cup\left[\dfrac{-1}{2};+\infty\right[$

Exercice 07 :

1) Soient x et y des nombres réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$ simplifier l'expression :

$A = 2|2x+7| - |3y| + 2|y+8| - |2y-x|$

2) Simplifier les nombres : $\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$; $\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$; $\left|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}\right|$; $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

3) Soient a et b des nombres réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Simplifier $\sqrt{(3b-1)^2}$ et $\sqrt{(a-5)^2}$.

4) Résoudre les équations :

$|5x+2| = 8$; $|-2x+1| = -1$; $|2x-1| = |3x-4|$.

5) Résoudre les inéquations :

$|2x-3| \le 1$; $|6x+11| \ge \dfrac{1}{6}$; $2 \le |10x+2| \le 5$.

Exercice 08 :

Soient x et y des nombres réels tels que :

$x \geq -2$; $y \leq -1$; $x - y = 6.$

1) Calculer : $A = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(y+1)^2}$.
2) Montrer que : $x \leq 5$ et $y \geq -8.$
3) Etablir que : $0 \leq x^2 + y^2 \leq 89$.
4) Calculer $B = |x+y-4| + |x+y+10|$.

Exercice 09 :

Soient a et b des nombres réels tels que : $|a| \leq 1$ et $|b| \leq 1$

1) Encadrer le nombre $ab+1$ et déduire que $ab+1 \neq 0.$
2) Monter que : $\left|\frac{a+b}{ab+1}\right| \leq 1.$

Exercice 10 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $A = \sqrt{x^2+1} - |x|$ et $B = \sqrt{x^2+1} + |x|$.

1) Montrer que : $A > 0$ et déduire que : $B > 2|x|$.
2) Calculer AB et déduire que : $A < \frac{1}{2|x|}$ pour $x \neq 0$.
3) Démontrer que pour tout $x \neq 0$:

   $|x| < \sqrt{x^2+1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$.
4) Donner un encadrement d'amplitude $\frac{1}{66}$ pour le nombre $\frac{\sqrt{122}}{3}$.

Exercice 11 :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\left|2x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et $\left|y - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$.

1) Démontrer que : $x \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ et $y \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.
2) Vérifier que : $xy - 3x - y - 1 = (x-2)(y-3) - 7.$
3) En déduire que : $-5 < xy - 3x - y - 1 < \frac{-13}{4}.$

Exercice 12 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que : $|x-1| < \frac{1}{2}$. Démontrer que $\frac{4}{5}$ est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{x}$ avec la précision $\frac{2}{3}$.

Exercice 13 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que α est une valeur approchée par excès de $\frac{1}{3}$ a 2×10^{-1} prés.

1) Montrer que : $\frac{2}{15} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ puis donner un encadrement de $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\left|\frac{x-1}{\alpha}\right| < \frac{1}{10}$, montrer que $\frac{29}{30} < x < \frac{31}{30}$.

Exercice 14 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in [3;+\infty[$. Posant $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

1) Montrer que : $A - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)}$.
2) **a)** Etablir que : $2\sqrt{x-1} < \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 2\sqrt{x}$.

   b) Déduire que : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} < A - 1 < \frac{1}{2(x-1)}$.
3) **a)** Montrer que $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{2x}$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$.

   b) Déduire que : $1 + \frac{1}{2x} < A < 1 + \frac{3}{4x}$.
4) Déduire que $\frac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision 5×10^{-2} .