L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Leçon L'ordre dans $\mathbb{R}$
Présentation globale le

I) L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

1)Définition : soient a et b deux réels.

$a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

$b \geq a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a > 0$

a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a < 0$

Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de *a* – *b*.

Exemple1 : comparer $\frac{101}{102}$ *et* $\frac{100}{101}$

SOLUTION :

$$\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+ \text{ donc : } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$$

Exemple2 : comparer a et b

$a = 2 + \sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3}$

SOLUTION :

$a - b = 2 - \sqrt{3}$ nombre positif

cad : $a - b \in \mathbb{R}^{*+}$ donc : $a \succ b$

Exemple3 : comparer $2a$ et $a^2 + 1$ avec $a \in \mathbb{R}$

SOLUTION :

$$\left(a^2+1\right) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$$

Donc : $a^2 + 1 \geq 2a$ si $a \in \mathbb{R}$

2)Activités : I) comparer les réels suivants :

1) $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$ 2) $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$ 3) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

4) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 5) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

II) soient *a* et *b* deux réels tel que : $a \leq b$
comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

III) soient *a* et *b* deux réels strictement positifs tel que : $a \leq b$ comparer : 1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

IV) soient *a* et *b* deux réels négatifs tel que : $a \leq b$
comparer : a^2 et b^2

SOLUTION : Comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a* – *b*.

1) on compare $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$

$\frac{8}{11} - \frac{5}{11} = \frac{8-5}{11} = \frac{3}{11} \geq 0$ donc $\frac{8}{11} \geq \frac{5}{11}$

2) on compare $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$

$\frac{13}{6} - \frac{13}{9} = \frac{39-26}{18} = \frac{13}{18} > 0$ donc $\frac{13}{6} > \frac{13}{9}$ ou $\frac{13}{6} \geq \frac{13}{9}$

3) on compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

$\frac{-15}{7} - \left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{-15}{7} + \frac{15}{4} = \frac{-60+105}{28} = \frac{45}{28} > 0$

donc $\frac{-15}{7} > -\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7} \geq -\frac{15}{4}$

4) on compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$

$\frac{-12}{7} - \frac{15}{4} = \frac{-48-105}{7} = \frac{-165}{28} < 0$ donc $\frac{-12}{7} < \frac{15}{4}$

ou $\frac{-12}{7} \leq \frac{15}{4}$

5) on compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

On a $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et

$50-20=30>0$ et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs

alors $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

II) soient a et b deux réels tel que : $a\le b$

1) on compare $5a$ et $5b$

On a : $5a-5b=5(a-b)$ et puisque $a\le b$ alors

$a-b\le 0$

Et on a : $5>0$ donc $5a\le 5b$

2) on compare $-13a$ et $-13b$

On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$ et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$

Et on a : $-13<0$ donc $-13a\ge -13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que : $a\le b$

1)on compare : a^2 et b^2

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : a et b deux réels strictement positifs donc $a+b\ge 0$ et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$

alors : $(a-b)(a+b)\le 0$

D'où $a^2\le b^2$

2) on compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

On a : $a\le b$ alors $a-b\le 0$

et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 0$ car c'est la somme de deux nombres positifs

donc $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\le 0$ D'où $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

3) on compare : $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

On a : $a\le b$ alors $b-a\ge 0$

et puisque a et b deux réels strictement positifs alors $ab>0$ car c'est la produit de deux nombres positifs

donc $\dfrac{b-a}{ab}\ge 0$ D'où $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$

IV) soient a et b deux réels strictement négatifs tel que : $a\le b$

on compare : a^2 et b^2

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : a et b deux réels négatifs donc $a+b\le 0$

et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$ alors : $(a-b)(a+b)\ge 0$

D'où $a^2\ge b^2$

II) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

1)L'ordre et l'addition

<u>Propriété :</u> Soient a et b et c trois nombres réels

✓ Si $a\le b$ alors $a+c\le b+c$ et $a-c\le b-c$

✓ Si $a\le b$ et $c\le d$ alors $a+c\le b+d$

(On peut ajouter membre a membre deux inégalités de même sens)

<u>Remarque :</u> on ne peut pas retrancher membre a membre deux inégalités de même sens

<u>Exemple :</u>

On a : $4\le 6$ et $2\le 6$ mais $4-2>6-6$

2)L'ordre et la multiplication

<u>Propriétés :</u>

1) $ab\ge 0$ ssi $a\ge 0$ ou $b\ge 0$ ou $a\le 0$ ou $b\le 0$

(le produit de deux réel de même signe et toujours positifs)

2) si $a\le b$ et $c\ge 0$ alors $ac\le bc$

si $a\le b$ et $c\le 0$ alors $ac\ge bc$

3) si $0\le a\le b$ et $0\le c\le d$ alors $ac\le bd$

si $0\le a\le b$ alors $a^2\le b^2$ et $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

4) si $a\le b\le 0$ alors $a^2\ge b^2$

5) si $ab>0$ on a : si $a\le b$ alors $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$ (Autrement dit, deux nombres strictement positifs ou strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Application 1:

Soit a est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si $a>1$, alors $a^3>a^2>a$
2. montrer que : si $a<1$, alors $a^3<a^2<a$.

SOLUTION :

De l'hypothèse $a>1$, on déduit d'une part que $a^2>a$ (on multiplie les deux membres par $a>0$) et d'autre part que $a^3>a^2$ (on multiplie par $a^2>0$).

Donc $a^3>a^2>a$.

De la même façon, lorsque $0<a<1$, on démontre que : $a^3<a^2<a$.

<u>Remarque</u> : pour $a=0$ et $a=1$, $a=a^2=a^3$.

Exercice 1 : comparer a et b :

$a=\sqrt{6}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

SOLUTION :

$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

on compare : $\sqrt{2}$ et 1

On a $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{2}>1$

par suite $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$

par suite $\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc

$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ D'où $a>b$

Exercice 2 : soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$

1) Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

SOLUTION : 1) On a $x+2 \geq x$ car $(x+2)-x \geq 0$

Donc $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve :

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

Exercice 3: soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$

Comparer : $x=\frac{7a+2b}{7a}$ et $y=\frac{8b}{7a+2b}$

SOLUTION : On a $x+2 \geq x$ car $(x+2)-x \geq 0$

$$x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$$

$$x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times 8b}{7a(7a+2b)}=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times 7a\times 2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^{+}$$

car $7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^{+}$ et $(7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^{+}$ D'où $x \geq y$

III) La valeur absolue et propriétés

1) Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit M le point d'abscisse x sur un axe normé(gradué)

La valeur absolue de x *est la distance* OM et on note : $|x|$

et on a : $OM=|x|$ (O l'origine de l'axe)

2) Conséquence : $x \in \mathbb{R}$

Si $x \geq 0$ alors $|x|=x$ et Si $x \leq 0$ alors $|x|=-x$

Exemples : calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

1) $|-3|$ 2) $|3|$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ 4) $\left|\sqrt{5}-2\right|$ 5) $\left|1-\sqrt{3}\right|$

6) $|\pi-4|$ 7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ 8) $\left|3-2\sqrt{3}\right|$

9) $A=\left|4-2\sqrt{3}\right|-\left|5-3\sqrt{3}\right|+\left|9-5\sqrt{3}\right|$

SOLUTION : 1) $|-3|=-(-3)=3$ 2) $|3|=3$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$

4) $\left|\sqrt{5}-2\right|$ on compare : $\sqrt{5}$ et 2

On a $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $(2)^2=4$ donc $\sqrt{5}>2$ par suite

$\left(\sqrt{5}-2\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ Donc $\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$

5) $\left|1-\sqrt{3}\right|$ on compare : $\sqrt{3}$ et 1

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$ par suite

$\left(1-\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}^{-*}$ donc : $\left|1-\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}$

6) $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$ car $4>\pi$

7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ donc $\sqrt{7}>\sqrt{2}$

par suite $\sqrt{2}-\sqrt{7}<0$

Donc $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{7}$

8) on a $3<2\sqrt{3}$ car $3^2<\left(2\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $3-2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^{-}$

Donc ; $\left|3-2\sqrt{3}\right|=-\left(3-2\sqrt{3}\right)=-3+2\sqrt{3}$

9) on a : $\sqrt{5}>\sqrt{2}$ donc : $\sqrt{5}-\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+}$ donc : $\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$A=\left|4-2\sqrt{3}\right|-\left|5-3\sqrt{3}\right|+\left|9-5\sqrt{3}\right|$

$A=4-2\sqrt{3}--\left(5-3\sqrt{3}\right)+\left(5\sqrt{3}-9\right)$

$A=4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9=0$

Remarque : Si x est un nombre réel, $|x^2|=x^2$ car $x^2 \geq 0$.

3)Définition : Soit $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et soit A et B les point d'abscisses respectives a et b sur un axe normé(gradué)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note $AB=|a-b|$

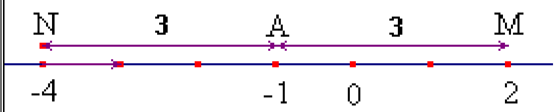
Remarque : $AB=BA$ donc $|a-b|=|b-a|$

Exemples :

$MN=|2-(-4)|=|2+4|=|6|=6$

$AM=|2-(-1)|=|3|=3$

$AN=|-1-(-4)|=|-1+4|=|3|=3$



4)Propriétés : $x\in\mathbb{R}$ **et** $y\in\mathbb{R}^*$ **et** $a\in\mathbb{R}^+$

$|x|\geq 0$; $|x^2|=|x|^2=x^2$; $-|x|\leq x\leq |x|$; $|x|=|-x|$

$\sqrt{x^2}=|x|$; $|xy|=|x||y|$; $|x+y|\leq|x|+|y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

$|x|=a$ équivaut à dire que $x=a$ ou $x=-a$

$|x|=|y|$ équivaut à dire que $x=y$ **ou** $x=-y$

Dire que $|x|=0$ équivaut à dire que $x=0$.

Applications :(*Résolution des équations)*

Résoudre les équations suivantes :

1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$ 3) $|x+2|=-1$

SOLUTION : 1) $|x-1|=5$

$|x-1|=5$ ssi $x-1=5$ ou $x-1=-5$

ssi $x=6$ ou $x=-4$ donc : $S=\{-4;6\}$

2) $|2x+1|=|x-3|$ ssi $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

ssi $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

ssi $x=-4$ ou $x=\dfrac{2}{3}$ donc : $S=\left\{-4;\dfrac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ car $|x+2|\geq 0$

Exercice 4 :1) calculer $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2$

2)comparer : $3\sqrt{2}$ et 5

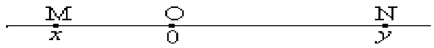
3)simplifier $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

SOLUTION : 1)

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=43-30\sqrt{2}$

2) $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $(5)^2=25$



Donc $3\sqrt{2}>5$ donc $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|3\sqrt{2}-5\right|=-\left(3\sqrt{2}-5\right)$

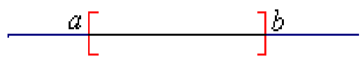
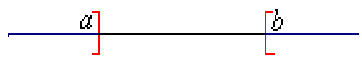
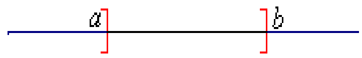
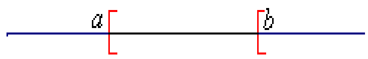
car $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$ donc $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

IV)Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

1)définition :

a et b sont deux réels tels que $a<b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté …	**inégalité …**	**Représentation de cette intervalle sur une droite graduée**
$[a\,;\,b]$	$a\leq x\leq b$	
$]a\,;\,b[$	$a<x<b$	
$]a\,;\,b]$	$a<x\leq b$	
$[a\,;\,b[$	$a\leq x<b$	
$[a\,;\,+\infty[$	$a\leq x$	
$]a\,;\,+\infty[$	$a<x$	
$]-\infty\,;\,b]$	$x\leq b$	
$]-\infty\,;\,b[$	$x>b$	

<u>**Vocabulaire :**</u> $[a\,;\,b]$, $]a\,;\,b[$,$]a\,;\,b]$ et $[a\,;\,b[$ sont des intervalles d'**extrémités** a et b ($a<b$). Le **centre** de l'intervalle est le nombre $\dfrac{b-a}{2}$, et sa **longueur** est $b-a$.

<u>**Remarques :**</u> $-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles.

Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi $]-\infty\,;\,+\infty[$.

$\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^-=]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}^*_+=]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^*_-=]-\infty,0[$

2)Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

Exemples : simplifier si c'est possible

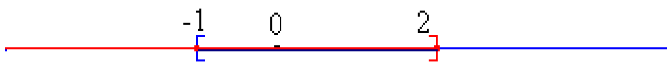
1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] 2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6]

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[

SOLUTION : 1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5]

2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[= [-1 ; 2]



4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[=]-∞ ; +∞[

Exercice 5 :calculer $I\cap J$ et $I\cup J$ dans les cas suivants

$J=[-1,+\infty[$ et $I=]-3,7]$

$J=[4;10]$ et $I=]-\infty,5[$

$I=[0,10[$ et $J=[-5;-1]$

$I=\left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J=\left]-1,\frac{3}{2}\right[$

SOLUTION : $I\cap J=]-1,7]$ et $I\cup J=]-3;+\infty[$

$I\cap J=[4,5[$ et $I\cup J=]-\infty;10]$

$I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=[-5;10]$

$I\cap J=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I\cup J=]-1,2]$

Exercice 6 :représenter chaque inégalité ou encadrement par l'intervalle qui convient ; 1) $x\geq -3$ 2) $x<5$

3) $1\leq 2x\leq 4$ 4) $0<6x-2\leq 10$ 5) $-8\leq 2-2x\leq 6$

SOLUTION : 1) $x\geq -3$ ssi $x\in[-3,+\infty[$

2) $x<5$ ssi $x\in]-\infty,5]$

3) $1\leq 2x\leq 4$ ssi $\frac{1}{2}\times 1\leq\frac{1}{2}\times 2x\leq 4\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$

ssi $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

4) $0<6x-2\leq 10$ ssi $0+2<6x-2+2\leq 10+2$

ssi $2<6x\leq 12$

ssi $2\times\frac{1}{2}<6x\times\frac{1}{2}\leq 12\times\frac{1}{2}$ ssi $1<3x\leq 6$ ssi

$1\times\frac{1}{3}<3x\times\frac{1}{3}\leq 6\times\frac{1}{3}$ ssi $\frac{1}{3}<x\leq 2$ ssi $x\in\left]\frac{1}{3},2\right]$

5) $-8\leq 2-2x\leq 6$ ssi $-8-2\leq 2-2x-2\leq 6-2$

ssi $-10\leq -2x\leq 4$

ssi $-10\times\frac{1}{2}\leq -2x\times\frac{1}{2}\leq 4\times\frac{1}{2}$ ssi $-5\leq -x\leq 2$ ssi

$-2\leq x\leq 5$ ssi $x\in[-2,5]$

Exercice 7 :résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\succ 2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\leq 4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x\succ 7\\ x\geq 0\end{cases}$ 3) $\begin{cases}-3\leq x\leq 0\\ -7\prec x\prec 10\end{cases}$

SOLUTION : $\{$ c'est l'intersection

1) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\succ 2\end{cases}$

$x\geq -3$ ssi $x\in[-3,+\infty[$ et $x>2$ ssi $x\in]2,+\infty[$

$S=]2,+\infty[\cap[-3,+\infty[=]2,+\infty[$

2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\leq 4\end{cases}$

$x\leq 4$ ssi $x\in]-\infty,4]$ et $x\succ 5$ ssi $]5,+\infty[$

$S=]5,+\infty[\cap]-\infty,4]=\varnothing$

3) $x>7$ ssi $x\in]7,+\infty[$ et $x\geq 0$ ssi $x\in[0,+\infty[$

$S=]7,+\infty[\cap[0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $\begin{cases}-3\leq x\leq 0\\ -7\langle x\langle 10\end{cases}$

$x\in]-7;10[$ ssi $-7\langle x\langle 10$

$-3\leq x\leq 0$ ssi $x\in[-3;0]$

$S=]-7;10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

Définition : Soient *a*, *b* et *x* trois nombres réels tq $a\leq b$.

On pose $I=[a;b]$ ou $I=]a;b[$ ou $I=[a;b[$ ou $I=]a;b]$

(Intervalles ***bornés*** d'extrémités *a* et *b*.)

Le ***réel*** $\frac{a+b}{2}$ est le milieu de intervalle I

Le ***réel*** $b-a$ est le amplitude de intervalle I

Le ***réel*** $\frac{b-a}{2}$ est le rayon de intervalle I

EXEMPLE : on considéré l'intervalle $I=[-3;4]$

$\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$ est le milieu de intervalle I

$4-(-3)=7$ est le amplitude de intervalle I

$\frac{4-(-3)}{2}=\frac{7}{2}$ est le rayon de intervalle I

3)Les intervalles et la valeur absolue

Propriété : $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}^{+*}$

$|x|\le r$ ssi $-r\le x\le r$ ssi $x\in[-r;r]$

$|x|\ge r$ ssi $x\ge r$ ou $x\le -r$

Applications (*Résolution des inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes : $|2x+1|\prec 6$

1) $|x-1|\le 2$ 2) $|x+2|\ge 3$ 3) $|2x+1|\prec 6$

SOLUTION : 1) $|x-1|\le 2$ ssi $-2\le x-1\le 2$ ssi $-2+1\le x-1+1\le 2+1$ ssi $-1\le x\le 3$ donc $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\ge 3$ ssi $x+2\ge 3$ ou $x+2\le -3$

Ssi $x\ge 1$ ou $x\le -5$

Ssi $x\in[1;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;-5]$

Donc $S=]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ ssi $-6<2x+1<6$

ssi $-6-1<2x+1-1<6-1$ ssi $-7<2x<5$

ssi $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ donc : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

Exercice 8 : Soit x et y deux réels tq : $x\ge\frac{1}{2}$ et $y\le 1$ et $x-y=3$

1) Calculer : $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

2) Montrer que : $\frac{1}{2}\le x\le 4$ et $-\frac{5}{2}\le y\le 1$

3) Calculer : $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

SOLUTION : 1)

$E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

On a $x\ge\frac{1}{2}$ donc $2x\ge 1$ donc $2x-1\ge 0$

Et on a $y\le 1$ donc $2y\le 2$ donc $2y-2\le 0$

donc $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

donc $E=2x-2y+1=2(x-y)+1$

et on a $x-y=3$ donc $E=2\times 3+1=7$

2)on montre que $-\frac{5}{2}\le y\le 1$???

On a $x-y=3$ donc $x=y+3$

Et on a $x\ge\frac{1}{2}$ donc $y+3\ge\frac{1}{2}$ donc $y\ge\frac{1}{2}-3$ donc $y\ge\frac{-5}{2}$

Et on a $y\le 1$ donc $-\frac{5}{2}\le y\le 1$

on montre que $\frac{1}{2}\le x\le 4$????

On a $x-y=3$ donc $y=x-3$

Et On a $-\frac{5}{2}\le y\le 1$ donc $-\frac{5}{2}\le x-3\le 1$

donc $-\frac{5}{2}+3\le x-3+3\le 1+3$ D'où $\frac{1}{2}\le x\le 4$

3) $F=|x+y-5|+|x+y+2|$?????

On cherche le signe de : $x+y-5$

On a $-\frac{5}{2}\le y\le 1$ et $\frac{1}{2}\le x\le 4$ donc $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\le x+y\le 1+4$

donc $-2\le x+y\le 5$

donc $-2-5\le x+y-5\le 5-5$ donc $-7\le x+y-5\le 0$

donc $x+y-5\le 0$

On cherche le signe de : $x+y+2$

On a $-2\le x+y\le 5$ donc $-2+2\le x+y+2\le 5+2$

donc $0\le x+y+2\le 7$

donc $x+y+2\ge 0$

donc $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

$F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

IV)L'encadrement et la valeur approché

1)Encadrement :

Définition : Réaliser un encadrement du réel x, c'est trouver deux nombres assez proche a et b tel que, a < x < b ou

a ≤ x ≤ b ou a <x ≤ b ou a ≤ x < b

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude b-a

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

Exemple : on a $\left(\sqrt{3}\simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73\le\sqrt{3}\le 1.74$ et ② $1.732\le\sqrt{3}\le 1.733$

① est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74-1.73$ près

c à d à $10^{-2}=0.01$ près

② est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733-1.732$ près

c à d à $10^{-3}=0.001$ près

Et on a 1.73 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par défaut à 10^{-2} près

1.74 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par excès à 10^{-2} près

Exercice 9 :x est un réel tel que $-1<x<2$. On pose

B = -2x – 3.

Trouver un encadrement de B et trouer son amplitude

2) Encadrements et opérations

<u>- Encadrements et additions</u>

Considérons deux réels x et y tels que :

$a<x<b$ et $c<y<d$ alors on a a+c < x+y < b+d.

<u>-Problème de la soustraction</u>

Pour encadrer le résultat d'une soustraction, on commence par la remplacer par une addition

(Soustraire c'est ajouter l'opposé)

<u>-Encadrements et multiplications</u>

Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que :

$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.
Le produit xy est alors encadrée par ac et bd.
On a $ac < xy < bd$.
Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.

***Remarque :** Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).*

Applications1 : $x \in [1;3]$ **et** $y \in [2;4]$

1)Trouver un encadrement de : x^2 et y^2 et $2x$ et $3y$ et $-x$ et $-y$ et $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$

2)Trouver un encadrement de : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ et $B = \frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

SOLUTION : 1) $x \in [1;3]$ ssi $1 \le x \le 3$ et $y \in [2;4]$ ssi $2 \le y \le 4$

On a $1 \le x \le 3$ donc $1^2 \le x^2 \le 3^2$ donc $1 \le x^2 \le 9$

On a $2 \le y \le 4$ donc $2^2 \le y^2 \le 4^2$ donc $4 \le y^2 \le 16$

On a $1 \le x \le 3$ donc $2\times1 \le 2x \le 2\times3$ donc $2 \le 2x \le 6$

On a $2 \le y \le 4$ donc $3\times2 \le 3\times y \le 3\times4$ donc $6 \le 3y \le 12$

On a $1 \le x \le 3$ donc $-3 \le -x \le -1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $-4 \le -y \le -2$

On a $1 \le x \le 3$ donc $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc $1\times\frac{1}{4} \le x \times \frac{1}{y} \le 3 \times \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

2) encadrement de $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

$6 \le 3y \le 12$ donc $-12 \le -3y \le -6$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$1+4+2-12 \le x^2 + y^2 + 2x - 3y \le 9+16+6-6$

Donc ① $-5 \le A \le 25$ ①est un encadrement du réel A à $25-(-5) = 30$ près

encadrement de $B = \frac{2x-1}{x+1}$

On a $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1)\times\frac{1}{x+1}$

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le 2x \le 6$ donc

$2-1 \le 2x-1 \le 6-1$ donc $1 \le 2x-1 \le 5$ ❸

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le x+1 \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$ ❹

On fait la produit membre a membre de ❸ et❹ on trouve :

$1\times\frac{1}{4} \le (2x-1)\times\frac{1}{x+1} \le 5\times\frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$ est un encadrement du réel B

d'amplitudes $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Applications2 :

1) Vérifier que $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que ; $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$

3) en déduire un encadrement de : $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

SOLUTION : 1) on a $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$ donc

$14^2 < 200 < 15^2$ donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times100} < \sqrt{15^2}$ donc $14 < \sqrt{2}\times10 < 15$

donc $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

donc $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) on a $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$ donc $22^2 < 500 < 23^2$

donc $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

donc $22 < \sqrt{5}\times10 < 23$ donc

$22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$ donc $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3)) on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc

$1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$

donc $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$

on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc

$1,4\times2,2 < \sqrt{2}\times\sqrt{5} < 1,5\times2,3$ donc $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

Applications3 : $x \in [-3;1]$ et $y \in [-6;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2 4) y^2 5) $x\times y$ 6) $\frac{x}{y}$

SOLUTION : 1) $x \in [-3;1]$ ssi $-3 \le x \le 1$

$y \in [-6;-2]$ ssi $-6 \le y \le -2$

donc $(-3)+(-6) \le x+y \le 1+(-2)$

donc $-9 \le x+y \le -1$

2) On a $x-y = x+(-y)$ et on a $-6 \le y \le -2$

donc $2 \le -y \le 6$

donc $(-3)+2 \le x+(-y) \le 1+6$

donc $-1 \le x-y \le 7$

3) On a $-3 \le x \le 1$ donc $0 \le x \le 1$ ou $-3 \le x \le 0$

donc $0^2 \le x^2 \le 1^2$ ou $0^2 \le x^2 \le (-3)^2$

donc $0 \le x^2 \le 1$ ou $0 \le x^2 \le 9$

donc $0 \le x^2 \le 9$

4) On a $-6 \le y \le -2$ donc $(-2)^2 \le y^2 \le (-6)^2$

donc $4 \le y^2 \le 36$

5) encadrement de : $x\times y$

$-3\le x\le 1$ et $-6\le y\le -2$

Si $0\le x\le 1$

on a $-6\le y\le -2$ alors on a $2\le -y\le 6$

donc $0\le -xy\le 6$ donc ① $-6\le xy\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $2\le -y\le 6$

donc ② $0\le xy\le 18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6\le xy\le 18$

6) encadrement de : $\frac{x}{y}$ $-3\le x\le 1$ On a

$-6\le y\le -2$ donc $-\frac{1}{2}\le \frac{1}{y}\le -\frac{1}{6}$

donc $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

Si $0\le x\le 1$

on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$ alors $0\le x\times\left(-\frac{1}{y}\right)\le \frac{1}{2}$ donc

$0\le -\frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$ donc ❸ $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

donc ❹ $0\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

D'après ❸ et ❹ on déduit que : $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

3)Valeur approchée d'un nombre.

Définition :
Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque $|x-a|\le r$.

Définition : Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque $a\le x\le a+r$. a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque : $a-r\le x\le a$.

<u>exemples:</u> 1) on a $1,38<\sqrt{2}<1,42$ donc

$1,40-0,02<\sqrt{2}<1,40+0,02$

$-0,02<\sqrt{2}-1,40<0,02$ donc $\left|\sqrt{2}-1,40\right|<0,02$

donc $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) on a $1,40\le\sqrt{2}<1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) on a $1,42-0,02<\sqrt{2}<1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

4) Approximation décimale.

Définition : Soit $x\in\mathbb{R}$ et $N\in\mathbb{Z}$ et $p\in\mathbb{N}$

Si $N\times10^{-p}\le x\le(N+1)\times10^{-p}$ alors :

$N\times10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près

$(N+1)\times10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près

Exemple :

: on a $0,333333<\frac{1}{3}<0,333334$ donc

$333333\times10^{-6}<\frac{1}{3}<(333333+1)\times10^{-6}$

333333×10^{-6} est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1)\times10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien