Corrigé de l'exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) $a-b=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{n+1-2n}{n(n+1)}=\frac{1-n}{n(n+1)}$

On a $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n>0$ et $n \geq 1$

Donc $n(n+1)>0$ et $1-n \leq 0$

Donc $\frac{1-n}{n(n+1)} \leq 0$

Donc $a-b \leq 0$

Et par suite $a \leq b$

2) $a-b=\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

On a $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n>0$

Donc $(n+1)(n+2)>0$

Donc $\frac{-1}{(n+1)(n+2)}<0$

Donc $a-b<0$

Et par suite $a<b$

3) $a-b=\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+1}=\frac{n-n-1}{\sqrt{n+1}}=\frac{-1}{\sqrt{n+1}}$

On a $\sqrt{n+1}>0$

Donc $\frac{-1}{\sqrt{n+1}}<0$

Corrigé de l'exercice 2

1) Soient a et b deux réels strictement positifs

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}$$

On a $(a-b)^2 \geq 0$ et $ab>0$

Donc $\dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$

Donc $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)-2 \geq 0$

Et pare suite $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$

3) Soient a et b deux réels strictement positifs

D'après le résultat de la question 1) , on a : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$

Donc $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2 \geq 4$

Et par suite $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

Corrigé de l'exercice 3

Soient a et b deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2 &= a-1+2\sqrt{(a-1)(b-1)}+b-1-ab \\
&= a-ab+b-1+2\sqrt{(a-1)(b-1)}-1 \\
&= a(1-b)-(1-b)+2\sqrt{(a-1)(b-1)}-1 \\
&= -(a-1)(b-1)+2\sqrt{(a-1)(b-1)}-1 \\
&= -\left[(a-1)(b-1)-2\sqrt{(a-1)(b-1)}+1\right] \\
&= -\left[\sqrt{(a-1)(b-1)}-1\right]^2
\end{aligned}$$

Puisque $-\left[\sqrt{(a-1)(b-1)}-1\right]^2 \leq 0$ alors $\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2 \leq 0$

Donc $\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\right)^2 \leq \left(\sqrt{ab}\right)^2$

Et par suite $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

(Rq : $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1} \geq 0$ et $\sqrt{ab} \geq 0$)

Corrigé de l'exercice 4

1) Soient x et y deux réels positifs tels que $x+y=1$

On a $0\leq\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

Donc $0\leq x+y-2\sqrt{xy}$

Donc $2\sqrt{xy}\leq x+y$

Et puisque $x+y=1$ alors $2\sqrt{xy}\leq 1$

Donc $4xy\leq 1$

D'où $xy\leq\frac{1}{4}$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$:

On a : $\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\left(1+\frac{1}{y^n}\right)=1+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{(xy)^n}=1+\frac{x^n+y^n}{(xy)^n}+\frac{1}{(xy)^n}$

✓ D'après le résultat de la question 1) on a : $xy\leq\frac{1}{4}$ donc $\boxed{\frac{1}{(xy)^n}\geq 2^{2n}}$ $(*)$

✓ On sait que $\left(\sqrt{x^n}-\sqrt{y^n}\right)^2\geq 0$ donc $x^n+y^n\geq 2\sqrt{(xy)^n}$

Donc $\frac{x^n+y^n}{(xy)^n}\geq\frac{2}{\sqrt{(xy)^n}}$

Et en utilisant $(*)$: Il est clair que : $\frac{2}{\sqrt{(xy)^n}}\geq 2\times 2^n$

D'où $\boxed{\frac{x^n+y^n}{(xy)^n}\geq 2\times 2^n}$ $(**)$

✓ D'après $(*)$ et $(**)$: $1+\frac{x^n+y^n}{(xy)^n}+\frac{1}{(xy)^n}\geq 1+2\times 2^n+2^{2n}$

D'où $\boxed{\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\left(1+\frac{1}{y^n}\right)\geq\left(1+2^n\right)^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) Soient x et y deux réels tels que : $0 < x < y$

   On a $x < y$ et $x > 0$

   donc $x \times x < x \times y$

   donc $\boxed{x^2 < xy}$

   et on a $x < y$ et $y > 0$

   donc $x \times y < y \times y$

   donc $\boxed{xy < y^2}$

   et par suite $\boxed{\boxed{x^2 < xy < y^2}}$

2) Supposons que $xy = 15$

   D'après le résultat de la question 1) , on a $x^2 < xy < y^2$

   Donc $x^2 < 15 < y^2$

   Donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{15} < \sqrt{y^2}$

   Donc $|x| < \sqrt{15} < |y|$

   Et puisque $x > 0$ et $y > 0$ alors $x < \sqrt{15} < y$

3) Posons $x = \dfrac{931}{241}$ et $y = \dfrac{3615}{931}$

   On a $0 < x < y$ et $xy = \dfrac{931}{241} \times \dfrac{3615}{931} = 15$

   Donc D'après le résultat de la question 2), on a : $\dfrac{931}{241} < \sqrt{15} < \dfrac{3615}{931}$.

Corrigé de l'exercice 6

Soient x et y deux réels tels que : $1 \le x \le 2$ et $\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{3}{2}$

1) On a $1 \le x \le 2$

   donc $\boxed{1 \le x^2 \le 4}$

   Et on a $\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{3}{2}$

donc $\frac{1}{4} \leq y^2 \leq \frac{9}{4}$

donc $\boxed{\frac{-9}{4} \leq -y^2 \leq \frac{-1}{4}}$

donc $1-\frac{9}{4}+1+\frac{1}{2} \leq x^2-y^2+x+y \leq 4-\frac{1}{4}+2+\frac{3}{2}$

d'où $\boxed{\boxed{\frac{1}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}}}$

2)

✓ $(x+y)(x-y+1)=x^2-xy+x+xy-y^2+y=x^2-y^2+x+y=E$

✓ On a $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{\frac{3}{2} \leq x+y \leq \frac{7}{2}}$ et $\boxed{\frac{1}{2} \leq x-y+1 \leq \frac{5}{2}}$

Donc $\frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{35}{4}$

Et par suite $\boxed{\boxed{\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{35}{4}}}$

3) On a :

d'après le résultat de la question 1) : $E \in \left[\frac{1}{4}, \frac{29}{4}\right]$ et d'après le résultat de la question 2) : $E \in \left[\frac{3}{4}, \frac{35}{4}\right]$

donc $E \in \left[\frac{1}{4}, \frac{29}{4}\right] \cap \left[\frac{3}{4}, \frac{35}{4}\right]$

d'où $E \in \left[\frac{3}{4}, \frac{29}{4}\right]$.

つづく