

Tronc Commun

Série 2 : Etude de Fonctions

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{-10x}{1+x^2}$

1. Montrer que la fonction f est impaire
2. Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur \mathbb{R}
3. a) Soient a et b deux réels distincts, montrer que : $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{10(ab - 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)}$
b) En déduire la monotonie de la fonction f sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$
4. Donner le tableau de variation de f sur \mathbb{R}

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Etudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Comparer les deux nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 3 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \frac{x}{x-2}$

1. Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$
2. Donner les tableaux de variations de f et g
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
4. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$
7. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$
 - a) Déterminer D_h
 - b) Montrer que la fonction h est paire

- c) Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+ - \{2\}$
- d) Tracer la courbe (C_h) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})
8. Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$
- a) Tracer la courbe (C_k) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

- Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$
- Donner les tableaux de variations de f et g
- Déterminer les points d'intersection de (C_f) et (C_g) avec les axes du repère
- Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
- Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
- Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$
 - Déterminer D_h
 - Montrer que la fonction h est paire
 - Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^+
 - Tracer la courbe (C_h) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$
 - Tracer la courbe (C_k) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})
 - Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$