Exercices avec solutions PROF : ATMANI NAJIB Tronc CS

FONCTIONS - *Généralités*

Exercice1: Soit la fonction f définie par , $f\left(x\right)=3x^{2}-1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par *f*.
2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par *f*,

Solution: 1) $f\left(1\right)=3\times1^{2}-1=3-1=2$ et

$f\left(\sqrt{2}\right)=3\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}-1=6-1=4$

$f\left(-1\right)=3\times\left(-1\right)^{2}-1=3-1=2$

2) $f\left(x\right)=2$ ssi $3\times x^{2}-1=2$

ssi $3\times x^{2}=2+1$ ssi $3\times x^{2}=3$ ssi $x^{2}=1$

ssi $x=-1$ ou $x=1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

Exercice2:

a. On considère la fonction définie par : $x\overset{f}{\mapsto}\dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x\overset{g}{\longmapsto}\sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x\overset{h}{\longmapsto}\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Exercice3 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^{2}-x+1$.

2) $f(x)=\dfrac{x^{3}}{2x-4}$.

3) $f(x)=\dfrac{2x^{4}}{x^{2}-4}$.

4) $f\left(x\right)=\dfrac{7x-1}{x^{3}-2x}$.

5) $f\left(x\right)=\sqrt{-3x+6}$.

6) $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{2x^{2}-5x-3}$.

7) $f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-3x+2}$.

8) $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^{2}+x+3}}$.

10) $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x-5\right|}{x^{2}+1}$.

11) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{\left|x\right|}}{x}$.

12) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f\left(x\right)=\sqrt{-2x^{2}+x+3}$.

14) $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x-5\right|}{x^{2}+1}$.

15) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{\left|x\right|}}{x}$.

16) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2x+4}$.

17) $f(x)=3x^{2}-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$.

18) $f(x)=\dfrac{x}{\left|2x-4\right|-\left|x-1\right|}$.

19) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

20) $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{-2x^{2}+2x+13}{x^{2}-x-6}}$.

21) $f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^{2}-x+1$ f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_{f}=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^{3}}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq0\right\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_{f}=\mathbb{R}-\left\{2\right\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^{4}}{x^{2}-4}$.

$D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^{2}-4\neq0\right\}$

$x^{2}-4=0$ ssi $x^{2}-2^{2}=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_{f}=\mathbb{R}-\left\{-2;2\right\}$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{7x-1}{x^{3}-2x}$. $D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^{3}-2x\neq0\right\}$

$x^{3}-2x=0$ ssi $x\left(x^{2}-2\right)=0$ ssi $x=0$ ou $x^{2}-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^{2}=2$ ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_{f}=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}$

5) $f\left(x\right)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq0\right\}$

$-3x+6\geq0$ ssi $x\leq2$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $-3x\geq-6$

Donc $D_{f}=\left]-\infty;2\right]$

6) $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{2x^{2}-5x-3}$. $D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^{2}-5x-3\neq0\right\}$

$2x^{2}-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^{2}-4ac=\left(-5\right)^{2}-4\times2\times\left(-3\right)=25+24=49=\left(7\right)^{2}>0$

$x_{1}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_{2}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq0\right\}$ soit Δ son discriminant

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$ $\quad a=2$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-9x+3}{x+1}\geq0 etx+1\neq0\right\}$

$-9x+3=0$ ssi $x=\frac{1}{3}$ ssi $-9x=-3$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\right\}$

$-2x^2+x+3=0$ $\quad a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines

$x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq0\right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$

Or on sait que $|x|\geq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

16) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq0 etx-1\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq-2 etx\neq1\right\}$

$D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

17) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-x\geq0 etx\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq0 etx\neq0\right\}$ donc : $D_f=]-\infty,0[$

18) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq0\right\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

19) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq0\right\}$

$2\cos x-1=0$ ssi $\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$ ssi $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

20) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq0 etx^2-x-6\neq0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6:

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } x_2' = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right].$$

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{6}}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{6} \geq 0\right\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 4\times1\times2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14+4\sqrt{6} = 14 + 2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$14+4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$$

On a $\Delta = 14+4\sqrt{6} > 0$ donc

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1} = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$$

et $$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f = \left]-\infty;-2\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

Exercice4: Soient les deux fonctions :

$f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|}$

Est-ce que : f=g. ? justifier

Solution :

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

alors $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2+1 = 1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x) donc : f=g.

Exercice5: Soient les deux fonctions :

$h(x) = \frac{x^2-x}{x}$ et $t(x) = x-1$

Est-ce que : f=g. ? justifier

Solution :

- on a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$
- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

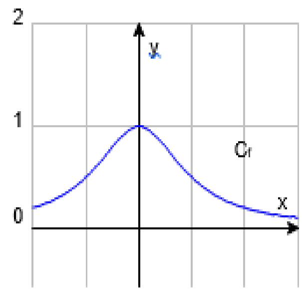
alors $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

Exercice6: Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ Sur I un l'intervalle $I = [-2;3]$

Réponses :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exercice7:que représente la courbe représentative d'une fonction affine f ($f(x) = ax+b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)

Solution : la courbe représentative d'une fonction affine f est une droite d'équation $y = ax+b$

Exercice8: Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x) = |2x+3|$

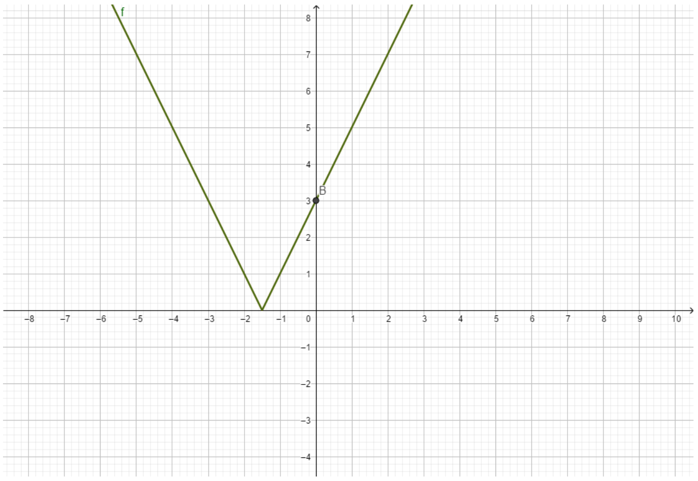
Solution :on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

x		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$	
$\|2x+3\|$	$-2x-3$		$2x+3$	

$2x+3=0$ ssi $x = \frac{-3}{2}$

Donc $f(x) = 2x+3$ si $x \in \left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$

$f(x) = -2x-3$ si $x \in \left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]$



Exercice9: Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x)=|x-2|+|x+2|$

Solution :

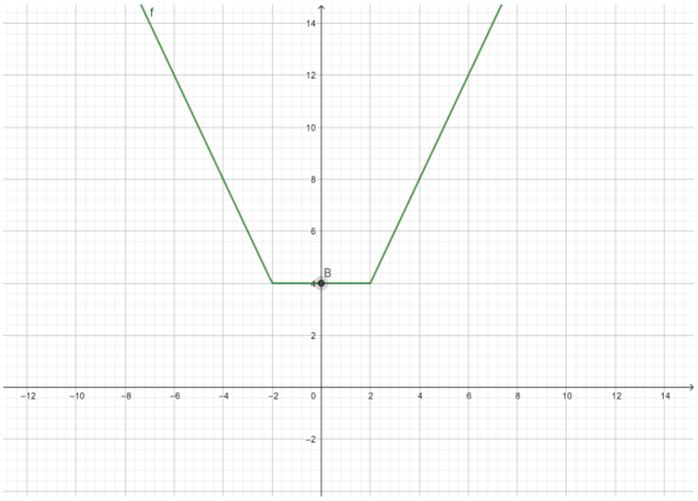
- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$x+2=0$ ssi $x=-2$

$x-2=0$ ssi $x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$		$x-2$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$		$x+2$		$x+2$	
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert$		$-2x$		4		$2x$	

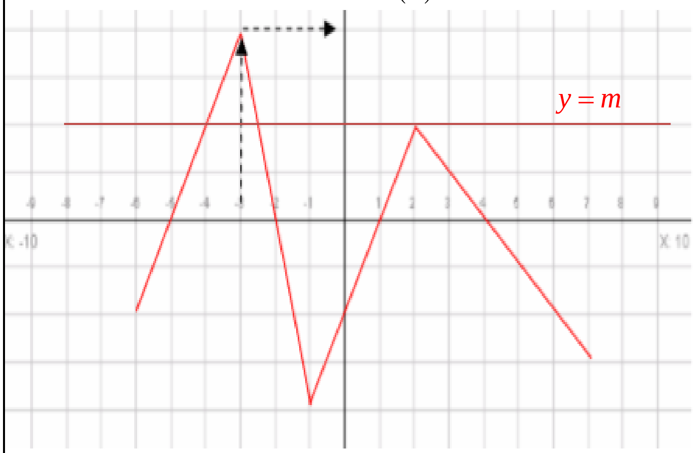
Donc $f(x)=-2x$ si $x\in\left]-\infty,-2\right]$ et $f(x)=4$ si $x\in[-2,2]$ et $f(x)=2x$ si $x\in\left[2,+\infty\right[$



Exercice10: La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$

Répondre par lecture graphique :

1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
3- Résoudre graphiquement $f(x)=0$
4- Quel est, en fonction de m , le nombre de solutions de $f(x)=m$
5- Résoudre graphiquement $f(x)\prec 0$
6- Résoudre graphiquement $f(x)\geq 2$



Solution :

1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4
Image de 0 est -2 Image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : -5,5 -1,75 0,5 et 5
Antécédents de 0 sont : -5 -2 1 et 4

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :
$S=\{-5;-2;1;4\}$

4)Nombre de solutions de $f(x)=m$ C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m\prec-4$: pas de solution
Si $m=-4$: une solution
Si: $-4\prec m\prec-3$ deux solutions
Si $-3\prec m\prec-2$: trois solutions
Si $-2\prec m\prec 2$: quatre solutions
Si $m=2$: trois solutions
Si: $2\prec m\prec 4$ deux solutions
Si $m=4$: une solution
Si $m\succ 4$: pas de solution

5) $f(x)\prec 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses.

$S=[-6;7]\cup\left]-2;1\right[\cup\left]4;7\right]$

6) $f(x)\geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y=2$

donc $S=[-4;2.5]\cup\{2\}$

Exercice11: étudier la parité des fonctions suivantes

1) $f(x)=3x^2-5$ 2) $g(x)=\dfrac{3}{x}$ 3) $h(x)=2x^3+x^2$

4) $t(x)=\dfrac{x}{x-2}$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\dfrac{3}{x}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_g=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\dfrac{3}{-x}=-\dfrac{3}{x}$
  $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $h(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$
  $h(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x)=\dfrac{x}{x-2}$

on a $t(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$

on a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

Exercice12: Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ 4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$. 7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

<u>Solutions</u>

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$
  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{-x}=x^2-\dfrac{1}{x}=\left(-x^2+\dfrac{1}{x}\right)$
  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$
  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ Donc
$D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exercice13 : soient les fonctions définies par :

1) $f(x) = 7x - 5$ 2) $g(x) = \frac{2}{x}$

Etudier la monotonie de f et de g

<u>Solutions :1)</u> f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $7x_1 \prec 7x_2$ car $7 \succ 0$

Donc $7x_1 - 5 \prec 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

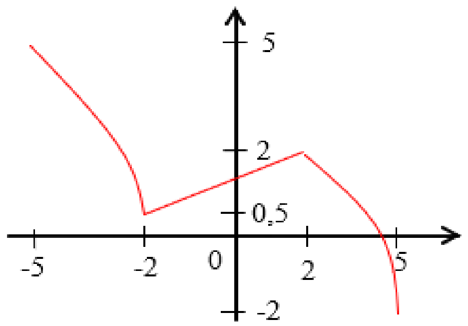
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) **tableau de variation :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

Exercice14 :
Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle **:** $[-5;5]$



Dresser son tableau de variation sur l'intervalle **:** $[-5;5]$

<u>Solutions</u>

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	0,5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Exercice15 : Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

1)déterminer D_f

2)calculer le taux d'accroissement de fonction de f Entre x_1 et x_2 tq $x_1 \neq x_2$

3)étudier les variations de f sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

4)Dresser son tableau de variation de f

<u>Solutions :1)</u> f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

4) <u>résumé</u> : **tableau de variation :** $f(0)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗

Exercice16: Soit g une fonction tq : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1)déterminer D_g

2)calculer le taux d'accroissement de fonction de g

Entre x_1 et x_2 tq $x_1\neq x_2$

3)étudier les variations de g sur les intervalles $I=]-\infty;-1[$ et $J=]-1;+\infty[$

4)Dresser son tableau de variation de f

<u>**Solutions :**</u> $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1)on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+1\neq 0$ ssi $x\neq -1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2)soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tq $x_1\neq x_2$

on a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3)a)sur $I=]-\infty;-1[$

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$ Donc

$T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b)sur $J=]-1;+\infty[$

Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ -1$ et $x_2\succ -1$ Donc $x_1+1\succ 0$ et $x_2+1\succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$ Donc

$T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $J=]-1;+\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

4) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Exercice17: Soit f une fonction tq : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1\neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ Donc

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}$

$$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a)sur $I=]0;1]$

Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$

Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$

Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2\succ 1$ Donc $x_1x_2-1\succ 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'

f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ ‖ $\searrow$	2	$\nearrow$

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

Exercice18 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=5x^2+3$

Montrer que $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Réponses: $D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ Donc $5x^2\geq 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\geq 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

d'où $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice19 : Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-4x^2+1$

Montrer que $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Réponses: Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-4x^2+1$ $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$

Donc $-4x^2\leq 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

d'où $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Exercice20 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=-4x^2+4x+5$

1°a) montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) montrer que $f(x)\leq 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Reponses: 1°a) on a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-(4x^2-4x+1)$

$=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\geq 0$

Par suite $-(2x-1)^2\leq 0$ donc $6-(2x-1)^2\leq 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $6-(2x-1)^2\leq 6$ alors

$f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice21 : donner le tableau et représenter la courbe des fonctions numériques définies par :

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

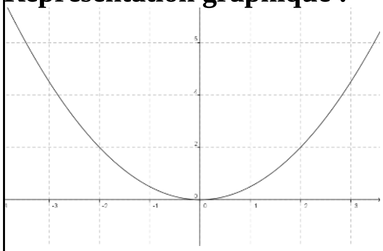
Réponses :1) $D_f=\mathbb{R}$ et On a $a=\frac{1}{2}\succ 0$

Donc : <u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

Représentation graphique :



2)Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

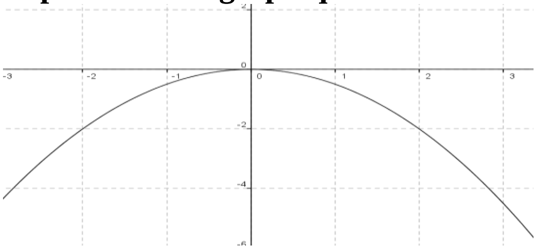
$D_f=\mathbb{R}$ et On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$

Donc : <u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\nearrow$	0	$\searrow$ $+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2

Représentation graphique :



Exercice22 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$f\left(x\right)=2x^{2}-4x-2$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1)déterminer D_f

2) déterminer α et β tel que : $f\left(x\right)=2\left(x-\alpha\right)^{2}+\beta$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de f

4) tracer la courbe représentative $\left(C_f\right)$ dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution :1)on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2)On a $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$ $\left(f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\right)$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{32}{4\times 2}=-4$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f\left(x\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{\Delta}{4a}=2\left(x-1\right)^{2}-4$$

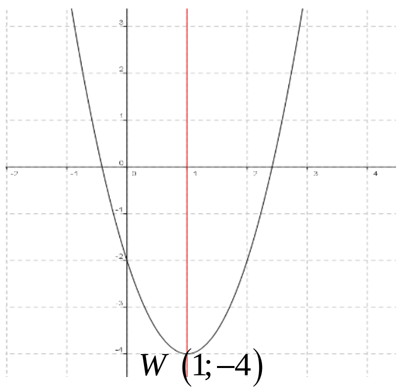
$$\left(f\left(1\right)=2-4-2=-4\right)$$

3)Soit $W\left(1;-4\right)$ Donc dans le repére $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(1;-4\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Tableau de variations de f</u> :On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

4)



Exercice23 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$g\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^{2}+2x+1$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1)déterminer D_g

2) déterminer α et β tel que : $g\left(x\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\alpha\right)^{2}+\beta$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de g

4) tracer la courbe représentative $\left(C_g\right)$ dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution :1) Soit g une fonction numérique tq :

$g\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^{2}+2x+1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

2)On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1$ $\left(g\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\right)$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$g\left(x\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}\left(x-2\right)^{2}+3$$

$$\left(g\left(2\right)=-\frac{1}{2}\left(2-2\right)+3=3\right)$$

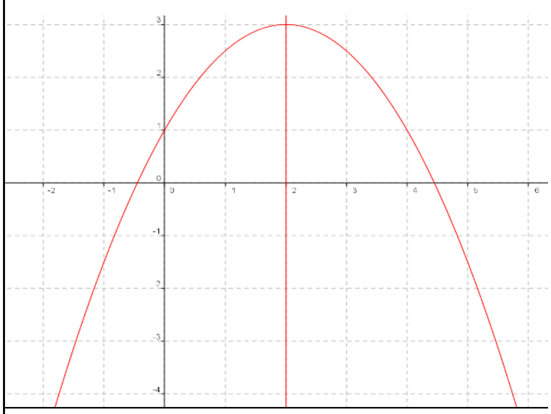
3)Soit $W\left(2;3\right)$ Donc dans le repére $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(2;3\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

4)



Exercice24 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$f\left(x\right)=\dfrac{-2x+1}{2x-4}$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1)déterminer D_f

2) déterminer α et β et k t el que : $f\left(x\right)=\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de f

4) tracer la courbe représentative $\left(C_f\right)$ dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution :1) Soit f une fonction numérique tq :

$f\left(x\right)=\dfrac{-2x+1}{2x-4}$

on a $f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ ssi $2x-4\neq0$ ssi $x\neq2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{2\right\}$

2)Si $x\in\mathbb{R}-\left\{2\right\}$ on a

$$\begin{array}{l|l} -2x+1 & 2x-4 \\ \cline{2-2} -2x+4 & -1 \\ \cline{1-1} \quad -3 & \end{array}$$

$f\left(x\right)=\dfrac{-\left(2x-4\right)-3}{2x-4}=\dfrac{-\left(2x-4\right)}{2x-4}+\dfrac{-3}{2x-4}=-1+\dfrac{-3/2}{x-2}$

3)$f\left(x\right)+1=\dfrac{-3/2}{x-2}$

On pose $\alpha=2$ et $\beta=-1$ et soit $W\left(2;-1\right)$

• Donc dans le repére $\left(W;\vec{i};\vec{j}\right)$ l'équation de $\left(C_f\right)$ est

$Y=\dfrac{-3/2}{X}$ avec $Y=y+1$ et $X=x-2$ donc $\left(C_f\right)$ est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites

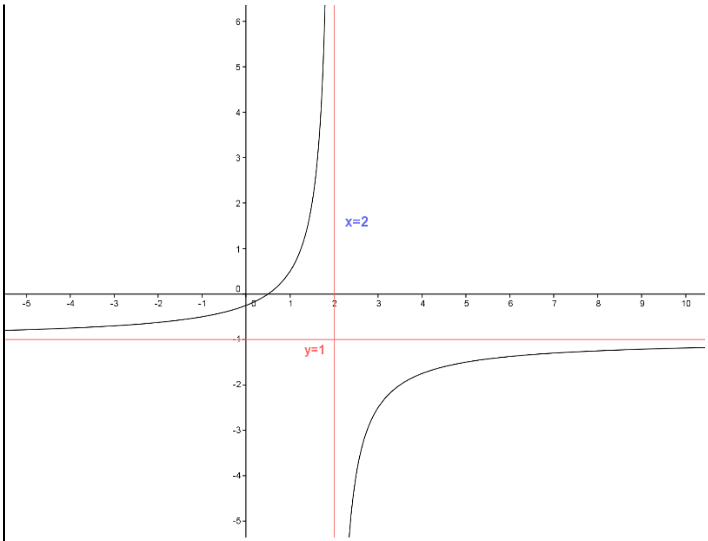
2)d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$

• Tableau de variations $X\longrightarrow\dfrac{-3/2}{X}$ $\left(-3/2\prec0\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

4)

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exercice25 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1)déterminer D_f

2) déterminer α et β et k t el que : $f\left(x\right)=\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de f

4) tracer la courbe représentative $\left(C_f\right)$ dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution :1)on a $f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ ssi $x-1\neq0$ ssi $x\neq1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{1\right\}$

2)Si $x\in\mathbb{R}-\left\{1\right\}$ on a :

$$\begin{array}{l|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \cline{1-1} \quad 3 & \end{array}$$

$f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2\left(x-1\right)+3}{x-1}=\dfrac{2\left(x-1\right)}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$

3)$f\left(x\right)-2=\dfrac{3}{x-1}$ ssi $y-2=\dfrac{3}{x-1}$

On pose $\begin{cases}x-1=X\\y-2=Y\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}$

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ ssi $Y=\dfrac{3}{X}$

• Tableau de variations de $X\longrightarrow\dfrac{3}{X}$ $\left(3\succ0\right)$

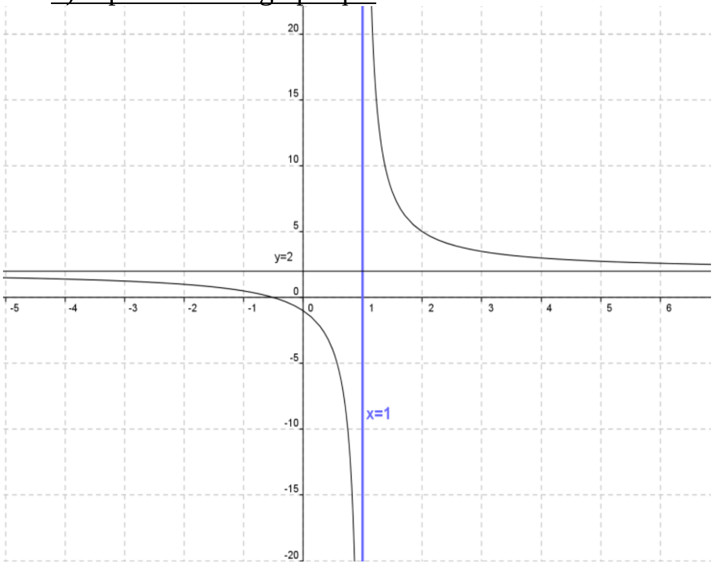
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

On a $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

4)Représentation graphique



Exercice26 : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$g(x) = \dfrac{-x}{x-2}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)déterminer D_g

2) déterminer α et β et k t el que : $g(x) = \beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) déterminer le Tableau de variations de g

4) tracer la courbe représentative (C_g)

Solution :1) $g(x) = \dfrac{-x}{x-2}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

2)Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a

$$\begin{array}{l|l} -x & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x-2} & -1 \\ -2 & \end{array}$$

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} = \frac{-1(x-2)-2}{x-2} = \frac{-1(x-2)}{x-2} + \frac{-2}{x-2} = -1 + \frac{-2}{x-2}$$

3) $g(x) + 1 = \dfrac{-2}{x-2}$ ssi $y + 1 = \dfrac{-2}{x-2}$

On pose $\begin{cases} x-2 = X \\ y+1 = Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y-1 \end{cases}$

$y = \dfrac{-x}{x-2}$ ssi $Y = \dfrac{-2}{X}$

- Tableau de variations de $X \longrightarrow \dfrac{-2}{X}$ $(-2 \prec 0)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

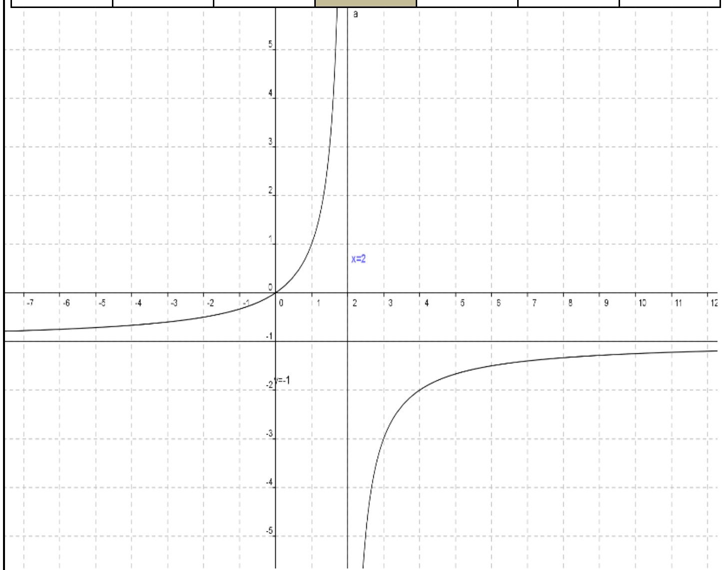
On a $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \dfrac{-x}{x-2}$

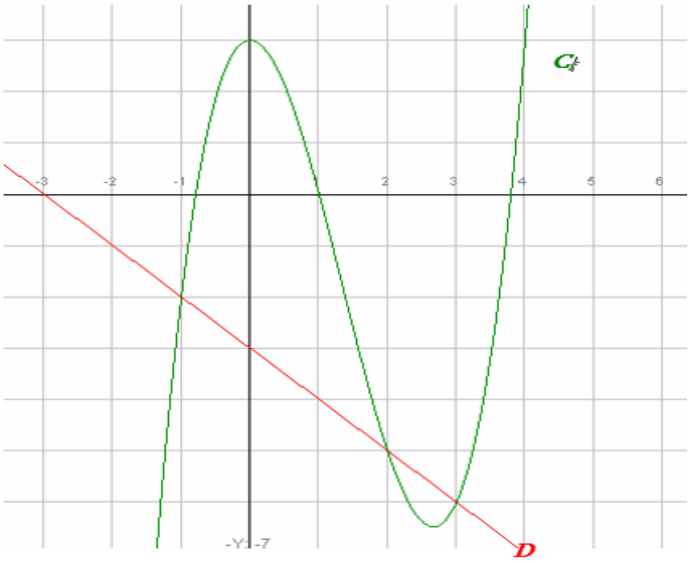
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

4)Représentation graphique

-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



Exercice27: Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite (D) d'équation $y=-x-3$



1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$
2- puis l'inéquation $f(x)\prec 3$.
3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ et l'inéquation $f(x)\geq 0$
4- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation $f(x)\leq -x-3$

Réponses : 1) $f(x)=3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

2- $f(x)=0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{a;1;b\}$ Avec $-1\prec a\prec -0.5$ et $3.5\prec b\prec 4$

$f(x)\geq 0$ $S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

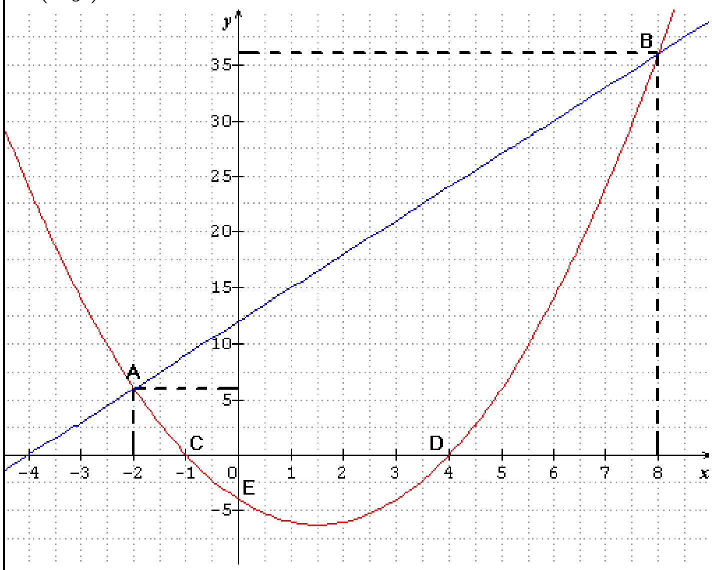
3- $f(x)=-x-3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y=-x-3$ donc $S=\{-1;2;3\}$

$f(x)\leq -x-3$ $S=]-\infty;-1]\cup[2;3]$

Exercice28 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=x^2-3x-4$ et $g(x)=3x+12$

1) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)
2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$
3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$
4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=8$ donc $S=\{-2;8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ ssi $x^2-3x-4=3x+12$ ssi $x^2-6x-16=0$

$a=1$ et $b=-6$ et $c=-16$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-16)=36+64=100=(10)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8$ et

$x_2=\frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

donc $S=\{-2;8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

$f(x)\succ g(x)$ ssi $x^2-3x-4\succ 3x+12$ ssi $x^2-6x-16\succ 0$

Les racines sont : $x_1=8$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

4)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $x^2-3x-4=0$

$a=1$ et $b=-3$ et $c=-4$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times(-4) = 9+16 = 25 = (5)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ et

$x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

et on a $f(0) = 0^2-3\times0-4 = -4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien