



## I. Généralités sur les fonctions numériques :

### A. Fonction numérique d'une variable numérique :

#### a. Préambule :

#### ♣ Activité 1:

Une tortue se déplace avec une mouvement uniforme tel que 4 cm par minute .

1. Compléter le tableau suivant pour connaître la distance parcourue en cm après l'écoulement du temps qui est exprimée en minute .

Le temps t ( en minute)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	x	.....
La distance d ( en centimètre )								

#### ♣ Vocabulaire :

- La relation qui nous permet à lier chaque élément  $x$  de  $\mathbb{R}^+$  par un seul élément de  $y \in \mathbb{R}^+$  qui tel que  $y = 4x$  est appelée **fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$**  , on la note par  $f$  ou  $g$  ou  $h$  ...
- on résume le tout par :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $x \mapsto f(x) = 4x$
- $x$  est la variable .
- $x$  est lié par  $f(x) = 4x$  on dit que :
  - ✓  $y = f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$  .
  - ✓  $x$  est un antécédent de  $y$  par  $f$
- Si l'image de  $x$  existe on dit que la fonction  $f$  est définie en  $x$ . ( par exemple  $-5$  n'a pas d'image )
- Tous les réels  $x$  qui ont images par la **fonction  $f$**  constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition , on le note par **D** ou  **$D_f$**  . pour l'activité on a :  $D_f = \mathbb{R}^+$  .
- $x \in D_f$  équivaut à  $f(x) \in \mathbb{R}$  .
- A est un ensemble inclus dans  $D_f$  ( $A \subset D_f$ ) , on dit que la fonction  $f$  est définie sur A .

#### b. Exemples :

On détermine l'ensemble de définition de chaque fonction suivante .

➤  $f(x) = \frac{1}{x}$  .

on a :  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^*$  ou  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ou  $D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  .

➤  $f(x) = \sqrt{x}$  .

$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^+$  ou  $D_f = [0, +\infty[$  .

➤  $f(x) = 2x$  .



on a : la fonction  $f$  est une fonction polynomiale donc il définie pour  $x$  de  $\mathbb{R}$  donc  $D_f = \mathbb{R}$  ou  $D_f = ]-\infty, +\infty[$ .

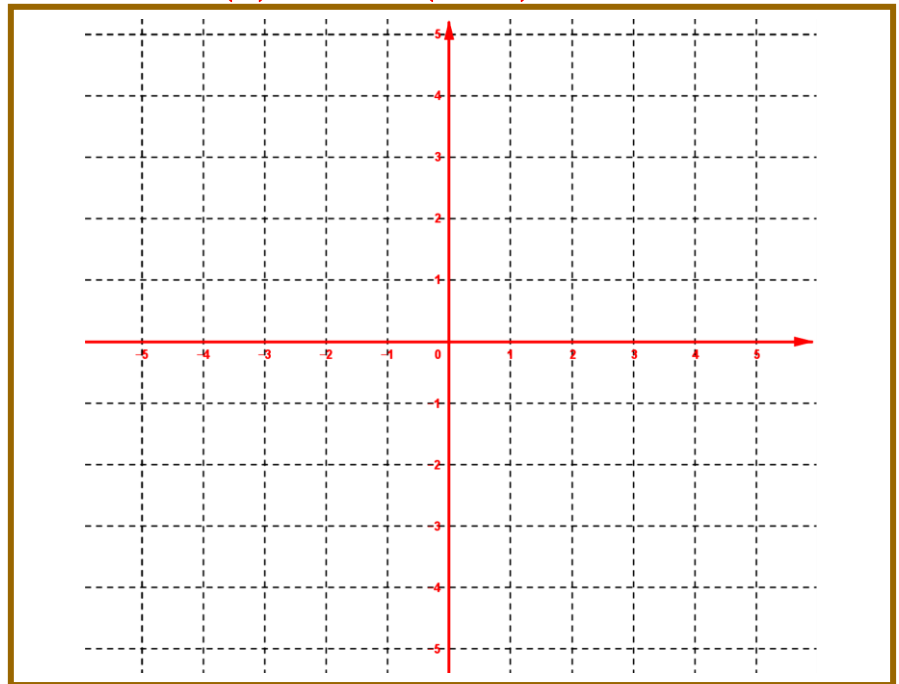
### B. La représentation graphique (ou la courbe représentative) d'une fonction numérique :

#### a. Activité :

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = 2x$ .

Le plan  $(P)$  est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (on général le repère est orthonormé).

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Construire quelques points de  $(P)$  tel que  $M(x, f(x))$  avec  $x \in D_f$ .



#### b. Vocabulaire :

Le dessin obtenue s'appelle la représentation graphique de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (ou la courbe de la fonction  $f$ ) on note  $(C_f)$ .

#### c. Définition :

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  ( $D_f \subset \mathbb{R}$ ).

Le plan  $(P)$  est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On appelle courbe représentative de la fonction  $f$ , notée  $(C_f)$ , l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  de coordonnées  $(x, f(x))$  où  $x \in D_f$ .

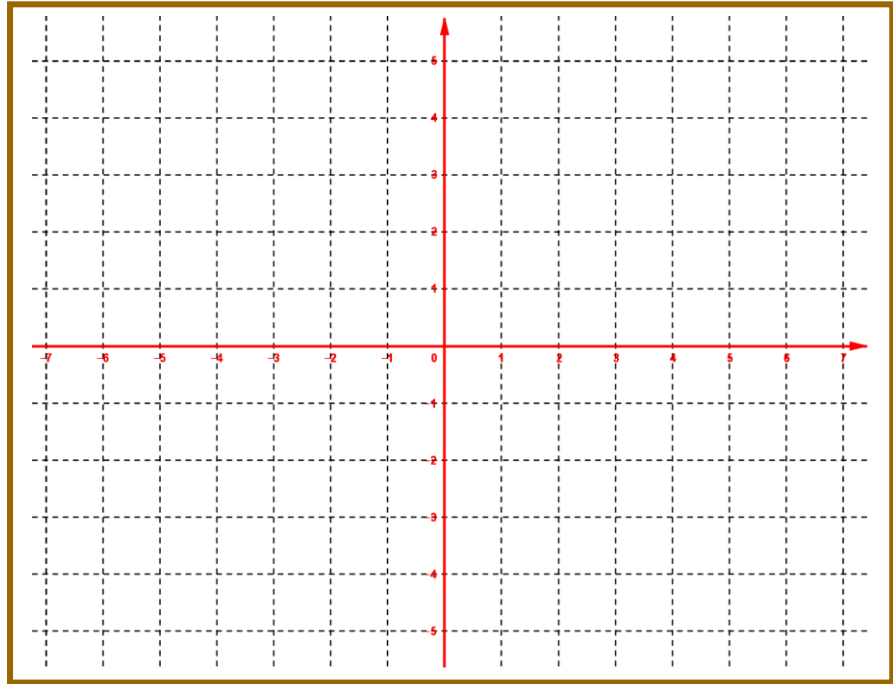
Un point  $M(x, y) \in (C_f)$  équivaut à  $x \in D_f$  et  $y = f(x)$ .

La relation :  $y = f(x)$  s'appelle équation cartésienne de la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**d. Exemple :**

Construire la courbe représentative de la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie

sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x$

**C. Egalité de deux fonctions :****a. Activité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = 2x$  et  $g(x) = x + |x|$ .

1. Simplifier l'écriture de la fonction  $g$ .
2. Quelle remarque peut-on donner ?

**b. Définition :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$ .

On dit que les deux fonctions  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement si :

- ❖  $D_f = D_g$ .
- ❖ Pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :  $f(x) = g(x)$
- ❖ Dans ce cas on écrit :  $f = g$

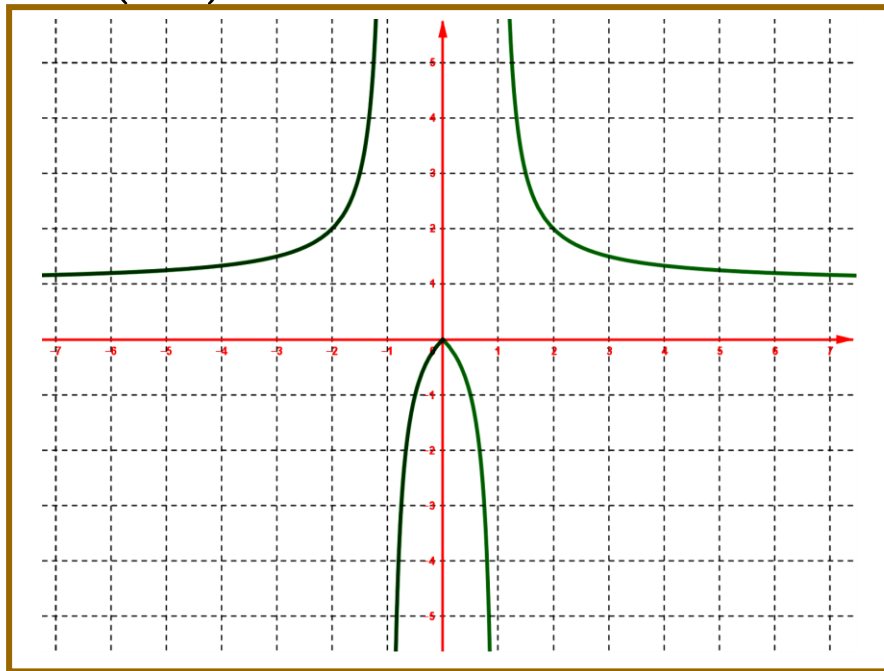
**c. Remarque :**

Si  $f = g$  on a : les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  de  $f$  et  $g$  sont confondues.

**II. Fonction paire – fonction impaire :****A. Fonction paire :****a. Activité :**



La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable  $x$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



1. La courbe  $(C_f)$  représente une fonction paire, quelles remarques peut-on donner ?

2. Donner la définition d'une fonction paire .

**b. Définition :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

On dit que  $f$  est une fonction paire sur  $D_f$  si et seulement si : pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

- ✓ Aussi  $-x$  est un élément de  $D_f$ .
- ✓  $f(-x) = f(x)$  (c.à.d.  $-x$  et  $x$  ont même image)

**c. Remarque :**

- la courbe d'une fonction  $f$  paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si la fonction  $f$  est paire sur  $D_f$  il suffit de connaître la partie de la courbe  $(C_f)$  tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de  $\mathbb{R}^+$  appelée domaine d'étude de la fonction  $f$ , notée  $D_E$ .
- On a :  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$ .

**d. Exemple :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = 3x^2 + 5$ .

1. On détermine l'ensemble de définition  $f$ .

La fonction  $f$  est une fonction polynômiale donc définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , d'où l'ensemble de définition est  $D_f = \mathbb{R}$ .

2. On étudie la parité de  $f$  ( est-ce que  $f$  est paire ou bien impaire ? ).

▪ On a : pour tout  $x$  de  $D_f = \mathbb{R}$  aussi  $-x$  est un élément de  $D_f = \mathbb{R}$ .

▪ Soit  $x$  de  $\mathbb{R}$  : on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^2 + 5 \\ &= 3x^2 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où :  $f(-x) = f(x)$ .

**Conclusion :** La fonction  $f$  est une fonction est paire .

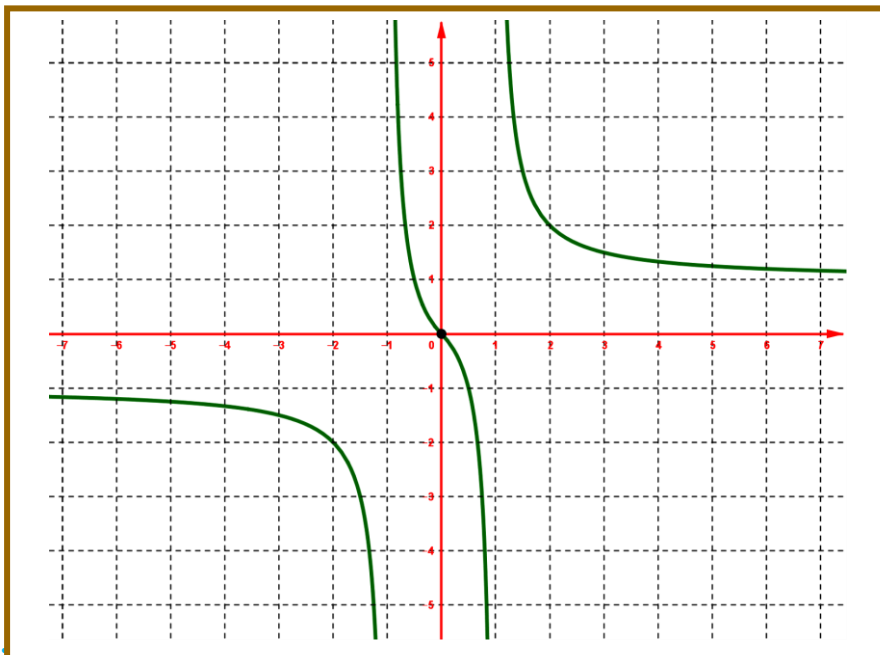
**B. Fonction impaire :**

**a. Activité :**

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable  $x$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. La courbe  $(C_f)$  représente une fonction impaire ,quelles remarques peut-on donner ?

2. Donner la définition d'une fonction impaire .



**b. Définition :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

On dit que  $f$  est une fonction impaire sur  $D_f$  si et seulement si : pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

✓ Aussi  $-x$  est un élément de  $D_f$ .

✓  $f(-x) = -f(x)$  ( c.à.d.  $-x$  et  $x$  ont des images opposées )

**c. Remarque :**

- la courbe d'une fonction  $f$  impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si la fonction  $f$  est impaire sur  $D_f$  il suffit de connaître la partie de la courbe  $(C_f)$  tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de  $\mathbb{R}^+$  appelée domaine d'étude de la fonction  $f$ , notée  $D_E$ .
- On a :  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$ .

**d. Exemple :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = 7x^3 + 2x$ .

**1.** On détermine l'ensemble de définition  $f$ .

La fonction  $f$  est une fonction polynômiale donc définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , d'où l'ensemble de définition est  $D_f = \mathbb{R}$ .

**2.** On étudie la parité de  $f$  (est-ce que  $f$  est paire ou bien impaire ?).

- On a : pour tout  $x$  de  $D_f = \mathbb{R}$  aussi  $-x$  est un élément de  $D_f = \mathbb{R}$ .

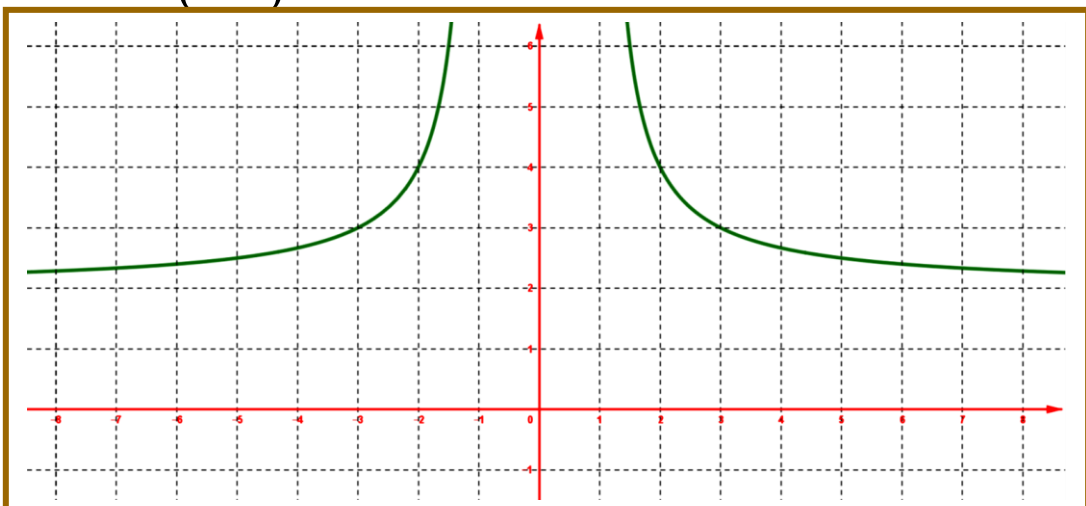
- Soit  $x$  de  $\mathbb{R}$  : on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 7(-x)^3 + 2(-x) \\ &= -7x^3 - 2x, \quad ((-x)^3 = -x^3) \\ &= -(7x^3 + 2x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

D'où :  $f(-x) = -f(x)$ . **Conclusion :** La fonction  $f$  est une fonction est impaire.

**III. Sens de variation d'une fonction :****a. Activité :**

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable  $x$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .





1. La courbe  $(C_f)$  représente une fonction .

- strictement croissante sur l'intervalle  $[-5, -2]$ , quelles remarques peut-on donner ?
- strictement décroissante sur l'intervalle  $[3, 6]$ , quelles remarques peut-on donner ?



2. Donner la définition d'une fonction strictement croissante puis d'une fonction strictement décroissante .

**b. Définitions :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  .  $I$  est un intervalle inclus dans  $D_f$  ( $I \subset D_f$ ) .

- ❖ On dit que  $f$  est une fonction croissante ou bien si et seulement si :  
pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a : si  $x < x'$  alors  $f(x) \leq f(x')$  . ( le sens de l'inégalité ne change pas )
- ❖ On dit que  $f$  est une fonction strictement croissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si :  
pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a : si  $x < x'$  alors  $f(x) < f(x')$  . ( le sens de l'inégalité ne change pas )
- ❖ On dit que  $f$  est une fonction décroissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si :  
pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a : si  $x < x'$  alors  $f(x) \geq f(x')$  . ( le sens de l'inégalité change )
- ❖ On dit que  $f$  est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si :  
pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a : si  $x < x'$  alors  $f(x) > f(x')$  . ( le sens de l'inégalité change )
- ❖ On dit que  $f$  est une fonction constante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si :  
pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a :  $f(x) = f(x')$

**c. Remarque :**

- ❖ la fonction  $f$  est strictement croissante on utilise la flèche suivante  .
- ❖ la fonction  $f$  est strictement décroissante on utilise la flèche suivante  .
- ❖ Si la fonction  $f$  est croissante ou bien décroissante sur l'intervalle  $I$  on dit que  $f$  est monotone sur  $I$  .
- ❖ Si la fonction  $f$  est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur l'intervalle  $I$  on dit que  $f$  est strictement monotone sur  $I$  .
- ❖ Déterminer les variations d'une fonction c'est de rechercher les intervalles sur lesquelles la fonction  $f$  est strictement monotone ou constante .
- ❖ On résume : l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et les variations de la fonction  $f$  par un tableau , appelé tableau de variation de  $f$  .

**d. Exemple :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = 5x - 3$  .



1. On détermine l'ensemble de définition  $f$  .

l'ensemble de définition de  $f$  est  $D_f = \mathbb{R}$  . ( car  $f$  est une fonction polynômiale ).

2. Etudier les variations de  $f$  sur  $D_f = \mathbb{R}$  , puis on donne le tableau de variation de la fonction  $f$  .

❖ On étudie la monotonie de  $f$  .

Soient  $x$  et  $x'$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $x < x'$

$x < x'$  alors  $5x < 5x'$  ( on multiplier les deux membres de l'inégalité par 5 )

Alors  $5x - 3 < 5x' - 3$ .

Alors  $f(x) < f(x')$ .

**Conclusion** : la fonction  $f$  est strictement croissants sur  $\mathbb{R}$  .

❖ On donne le tableau de variation de  $f$  .

Ensemble de définition $\rightarrow$	$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f \rightarrow$	$f(x)$		$\nearrow$

IV. Taux d'accroissement d'une fonction :

a. Définition :

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  .  $I$  est un intervalle inclus dans  $D_f$  ( $I \subset D_f$ ) .

Soient  $x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x \neq x'$ , le nombre  $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$  est appelé le taux d'accroissement

de la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x'$  , on note  $T_f$  d'où  $T_f = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

b. Exemple :

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = 5x - 3$  .

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur  $D_f = \mathbb{R}$  .

$$\begin{aligned}
 \text{Soient } x \text{ et } x' \text{ de } I \text{ tel que } x \neq x', \text{ on a : } T_f &= \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\
 &= \frac{5x - 3 - (5x' - 3)}{x - x'} \\
 &= \frac{5x - 3 - 5x' + 3}{x - x'} \\
 &= \frac{5(x - x')}{x - x'} = 5
 \end{aligned}$$

**Conclusion** : le taux d'accroissement de la fonction  $f$  est  $T_f = 5$  .





### c. Propriété :

$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ .

- ❖ Si  $T_f > 0$  alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $I$ .
- ❖ Si  $T_f < 0$  alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $I$ .
- ❖ Si  $T_f = 0$  alors la fonction  $f$  est constante sur l'intervalle  $I$ .

### d. Exemple :

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = 5x - 3$ .

#### 1. Déterminer la monotonie de la fonction $f$ .

D'après l'exemple précédent on a :  $T_f = 5 > 0$  d'où la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

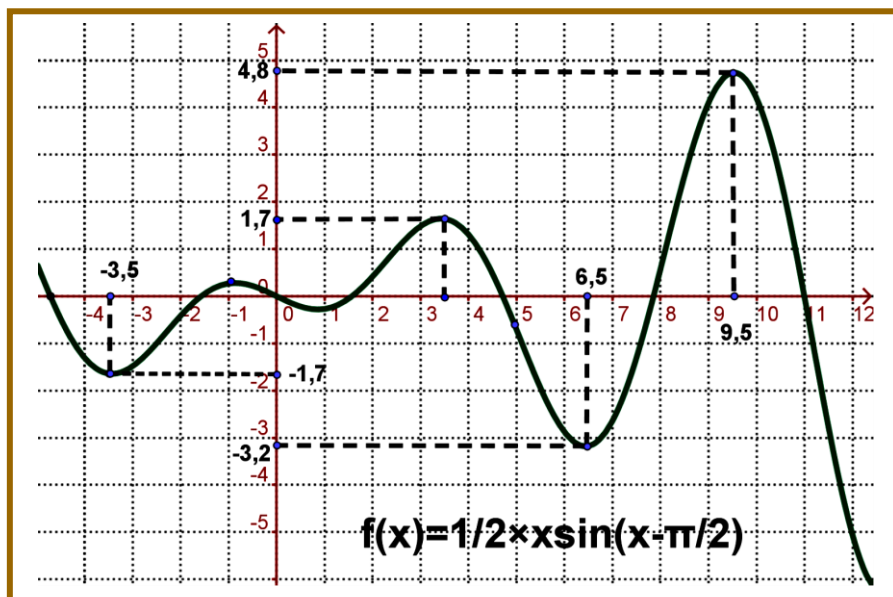
### V. Extremums d'une fonction :

#### A. Valeurs maximales valeurs minimales d'une fonction sur un intervalle $I$ :

##### a. Activité :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$ , dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- On dit que  $1,7$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[2, 4]$  ou  $]0, 7[$
- On dit que  $9,5$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[8, 11]$  ou  $]-4, 10[$
- 1. Quelle définition peut-on donner sur valeurs maximales .
- On dit que  $-1,7$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-4, -2]$  ou  $[-4, 3]$
- On dit que  $6,5$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[3, 8]$  ou  $[-4, 10[$
- 2. Quelle définition peut-on donner sur valeurs minimales .



**b. Définition :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .  $I$  est un intervalle inclus dans  $D_f$  ( $I \subset D_f$ ),  $a \in I$ .

- ///  $f(a)$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  équivaut à  $f(x) \leq f(a)$ .
- ///  $f(a)$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  équivaut à  $f(a) \leq f(x)$ .

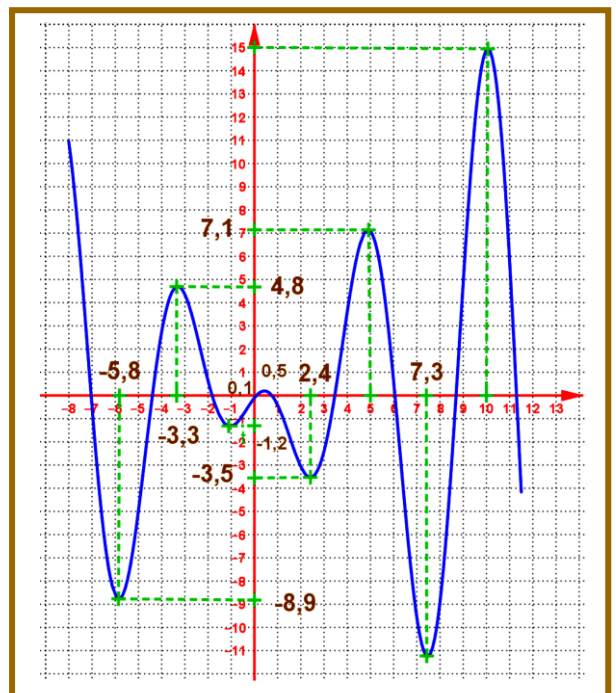
**c. Remarque :**

- ///  $f(a)$  est un extrémum de la fonction  $f$  signifie que  $f(a)$  est une valeur maximale ou bien  $f(a)$  est une valeur minimale de  $f$ .
- /// On dit aussi que la fonction  $f$  admet une valeur maximale en  $a$ .
- /// On dit aussi que la fonction  $f$  admet une valeur minimale en  $a$ .
- /// Si  $f(a)$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur  $D_f$  on dit que  $f(a)$  est une valeur maximale absolue de  $f$ . (si non on dit que  $f(a)$  est une valeur maximale relative)
- /// Si  $f(a)$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur  $D_f$  on dit que  $f(a)$  est une valeur minimale absolue de  $f$ . (si non on dit que  $f(a)$  est une valeur minimale relative)

**d. Exercice :**

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$ , dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les extrémums de  $f$  sur
  - $[4, 11]$  ;  $[-8; 9]$  ;  $[-5; 3]$

**VI. Etude de certaines fonctions :**

**A. Fonction  $f(x) = ax^2$  ; ( avec  $a \neq 0$  )**

**a. Activité :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = ax^2$  ; ( avec  $a \neq 0$  ) .



1. On détermine l'ensemble de définition  $f$  .

l'ensemble de définition de  $f$  est  $D_f = \mathbb{R}$  . ( car  $f$  est une fonction polynômiale ).

2. On étudie la parité de  $f$  ( est-ce que  $f$  est paire ou bien impaire ? ) .

- On a : pour tout  $x$  de  $D_f = \mathbb{R}$  aussi  $-x$  est un élément de  $D_f = \mathbb{R}$  .
- Soit  $x$  de  $\mathbb{R}$  : on a :  $f(-x) = a(-x)^2$   
 $= ax^2$   
 $= f(x)$

D'où :  $f(-x) = f(x)$  .

**Conclusion :** La fonction  $f$  est une fonction est paire sur  $D_f = \mathbb{R}$  .

3. On déduit l'ensemble d'étude de  $f$  .

On a :  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$  .

**Conclusion :** domaine d'étude de  $f$  est  $D_E = [0, +\infty[$  .

4. Calculer le taux d'accroissements de  $f$  sur  $D_E$  et on déduit les variations de  $f$  sur  $D_E$  puis sur  $D_f$  .

$$\begin{aligned} \text{Soient } x \text{ et } x' \text{ de } D_E = [0, +\infty[ \text{ tel que } x \neq x', \text{ on a : } T_f &= \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\ &= \frac{ax^2 - ax'^2}{x - x'} \\ &= \frac{a(x - x')(x + x')}{x - x'} = a(x + x') \end{aligned}$$

Donc :  $T_f = a(x + x')$  puisque  $x$  et  $x'$  de  $D_E = [0, +\infty[$  donc  $x + x' \geq 0$  et on a  $x \neq x'$  au moins un des nombres  $x$  et  $x'$  est non nul d'où  $x + x' > 0$  .

1<sup>er</sup> cas :  $a > 0$  car  $f(x) = ax^2$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

On a  $a > 0$  et  $x + x' > 0$  donc  $a(x + x') > 0$  d'où  $T_f > 0$  .

**Conclusion 1 :**

- la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $D_E = [0, +\infty[$  .
- la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, 0]$  car la fonction est paire ( la fonction ne varie pas dans le même sens .

2<sup>ème</sup> cas :  $a < 0$  car  $f(x) = ax^2$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

On a  $a < 0$  et  $x + x' > 0$  donc  $a(x + x') < 0$  d'où  $T_f < 0$  .

**Conclusion 2 :**

- la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $D_E = [0, +\infty[$  .
- la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, 0]$  car la fonction est paire ( la fonction ne varie pas dans le même sens .

**b. propriété :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = ax^2$  ; ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) .

❖ la fonction  $f$  est paire sur  $D_f = \mathbb{R}$  .

❖ La monotonie de la fonction  $f$  est :

• 1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]-\infty, 0]$  .

• 2<sup>ème</sup> cas  $a < 0$  :

la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$  et strictement croissante sur  $]-\infty, 0]$  .

❖ le tableau de variation est :

• 1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

$a > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

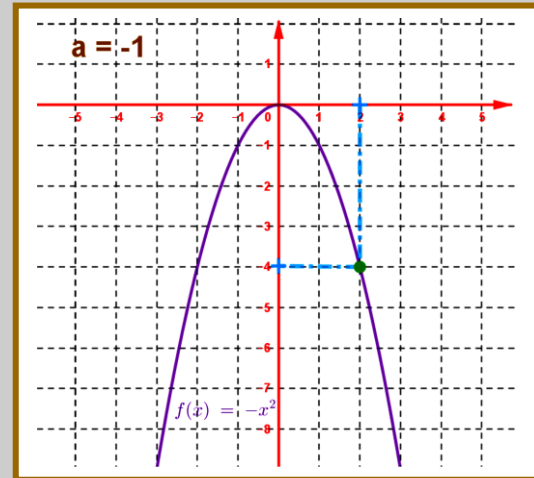
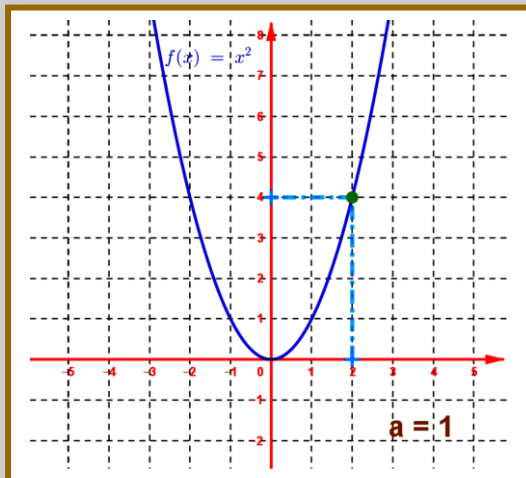
↘ ↗

• 2<sup>ème</sup> cas  $a < 0$  :

$a < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

↗ ↘

❖ La courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



❖ La courbe représentative de la fonction  $f$  est appelée parabole , de sommet l'origine  $O$  ( du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ) , d'axe de symétrie l'axe des ordonnées ( la droite d'équation  $(D) : x = 0$  ) .

**c. Exemple :**

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  .

On a :  $a = \frac{1}{2}$  d'où le tableau de variations de  $f$  est :

$a = \frac{1}{2} > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

↘ ↗

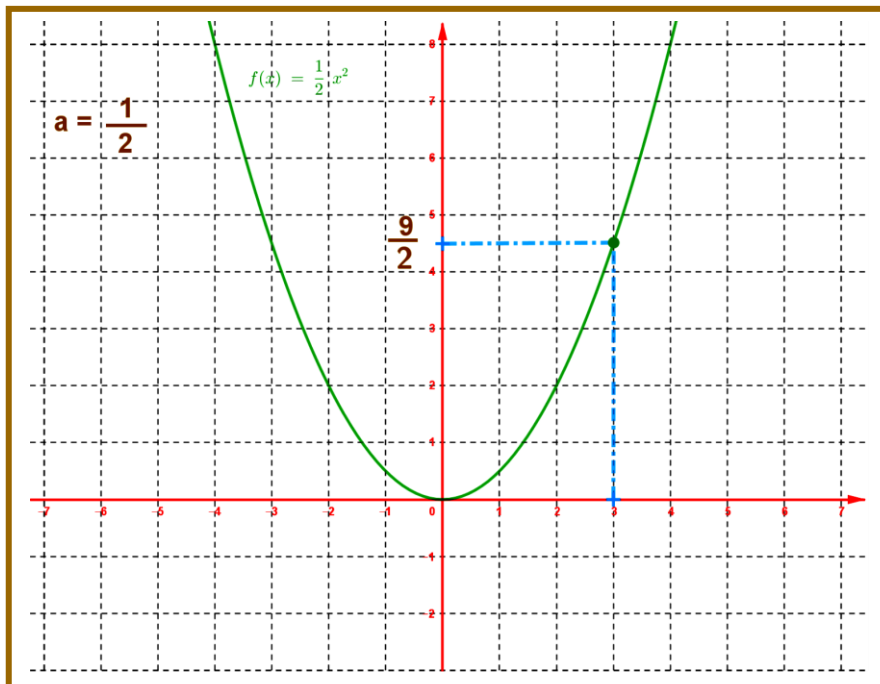


2. Construire la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour construire la courbe on donne un tableau de certains valeurs :

$x$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{9}{2}$	...

La courbe représentative : ( on oublie pas que la fonction  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$  )



**B.** Fonction  $f(x) = \frac{a}{x}$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

**a.** Activité :

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \frac{a}{x}$  ; ( avec  $a \neq 0$  ) .

1. On détermine l'ensemble de définition  $f$  .

$x \in D_f$  est équivalent à  $x \neq 0$

l'ensemble de définition de  $f$  est  $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  . ( car  $f$  est une fonction rationnelle ).

2. On étudie la parité de  $f$  ( est-ce que  $f$  est paire ou bien impaire ? ) .

▪ On a : pour tout  $x$  de  $D_f = \mathbb{R}^*$  aussi  $-x$  est un élément de  $D_f = \mathbb{R}^*$  .

▪ Soit  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  : on a :  $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$

D'où :  $f(-x) = -f(x)$  .

**Conclusion :** La fonction  $f$  est une fonction est impaire sur  $D_f = \mathbb{R}^*$  .



3. On déduit l'ensemble d'étude de  $f$  .

$$\text{On a : } D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{+*} = ]0, +\infty[ .$$

**Conclusion :** domaine d'étude de  $f$  est  $D_E = ]0, +\infty[$  .

4. Calculer le taux d'accroissements de  $f$  sur  $D_E$  et on déduit les variations de  $f$  sur  $D_E$  puis sur  $D_f$  .

Soient  $x$  et  $x'$  de  $D_E = ]0, +\infty[$  tel que  $x \neq x'$ , on a :

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\ &= \frac{\frac{a}{x} - \frac{a}{x'}}{x - x'} \\ &= \frac{\frac{ax' - ax}{xx'}}{x - x'} \\ &= \frac{a(x' - x)}{xx'} \\ &= \frac{-a(x - x')}{xx'(x - x')} \\ &= \frac{-a \cancel{(x' - x)}}{xx' \cancel{(x - x')}} \\ &= \frac{-a}{xx'} \end{aligned}$$

Donc :  $T_f = \frac{-a}{xx'}$  puisque  $x$  et  $x'$  de  $D_E = ]0, +\infty[$  donc  $x + x' \geq 0$  et on a  $x \neq x'$  au moins un des nombres  $x$  et  $x'$  est non nul d'où  $x + x' > 0$ .

1<sup>er</sup> cas :  $a > 0$  car  $f(x) = \frac{a}{x}$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

On a  $-a < 0$  et  $x + x' > 0$  donc  $\frac{-a}{xx'} < 0$  d'où  $T_f < 0$  .

**Conclusion 1 :**

- la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $D_E = ]0, +\infty[$  .
- la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, 0[$  car la fonction est impaire ( la fonction varie dans le même sens ) .

2<sup>ème</sup> cas :  $a < 0$  car  $f(x) = \frac{a}{x}$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

On a  $-a > 0$  et  $x + x' > 0$  donc  $\frac{-a}{xx'} > 0$  d'où  $T_f > 0$  .

**Conclusion 2 :**

- la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $D_f = ]0, +\infty[$ .
- la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty, 0[$  car la fonction est impaire ( la fonction varie dans le même sens ).

**b. propriété :**

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \frac{a}{x}$  ; ( $a \in \mathbb{R}^*$ ).

❖ la fonction  $f$  est impaire sur  $D_f = \mathbb{R}^*$ .

❖ La monotonie de la fonction  $f$  est :

- 1<sup>er</sup> cas  $\Delta > 0$  :

la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]-\infty, 0[$ .

- 2<sup>ième</sup> cas  $\Delta < 0$  :

la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$  et strictement croissante sur  $]-\infty, 0[$ .

❖ le tableau de variation est :

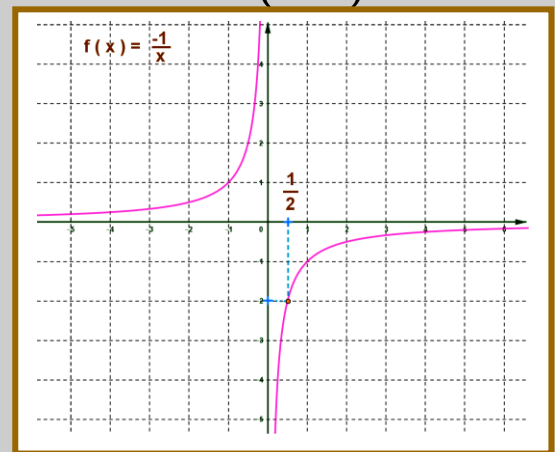
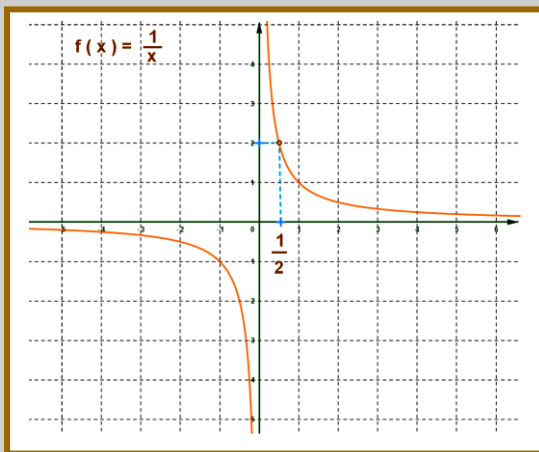
- 1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		$\searrow \parallel \searrow$	

- 2<sup>ième</sup> cas  $a < 0$  :

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		$\nearrow \parallel \nearrow$	

❖ La courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



❖ La courbe représentative de la fonction  $f$  est appelée hyperbole ,

- ✓ de centre de symétrie l'origine  $O$  ( du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ),
- ✓ d'asymptote horizontale l'axe des abscisses ( la droite d'équation  $(D) : y = 0$  )
- ✓ d'asymptote verticale l'axe des ordonnées ( la droite d'équation  $(D') : x = 0$  )

**c. Exemple :**

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

On a :  $a = 2$  d'où le tableau de variations de  $f$  est :

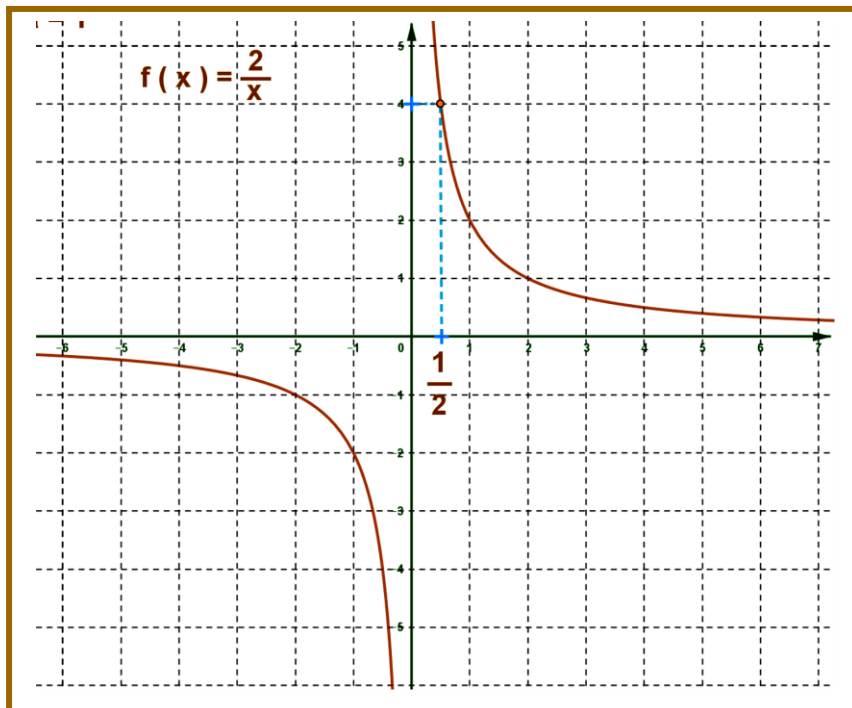
$a > 0$	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
	$f$		$\downarrow$	$\parallel$

2. Construire la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour construire la courbe on donne un tableau de certains valeurs :

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$f(x)$	4	2	1	$\frac{2}{3}$	...

La courbe représentative : ( on oublie pas que la fonction  $f$  est impaire sur  $\mathbb{R}^*$  )



C. Fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

a. Propriété ( admise ) :

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ; ( avec  $a \neq 0$  )

- ❖ La fonction  $f$  s'écrit de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .
- ❖ La courbe représentative de la fonction  $f$  est une parabole, de sommet le point  $S(-\alpha, \beta)$  ( du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ), d'axe de symétrie la droite d'équation  $(D) : x = -\alpha$  ).
- ❖ On La courbe représentative de la fonction  $f$  est obtenue en utilisant la translation du vecteur  $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$  de la courbe  $f(x) = ax^2$





❖ le tableau de variation est :

• 1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

$a > 0$	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f		$f(-\alpha) = \beta$	

• 2<sup>ème</sup> cas  $a < 0$  :

$a < 0$	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f		$f(-\alpha) = \beta$	

**b.** La courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

❖ Exemple  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  ; ( $a = 1 > 0$ ).  $a = 1 > 0$  et  $b = -4$  et  $c = 3$  et  $\Delta = 4$

❖ le tableau de variations est :

• on a  $a > 0$  : On a :  $f(x) = x^2 - 4x + 3 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

d'où :  $f(x) = x^2 - 4x + 3 = a \left( x + \frac{-4}{2 \times 1} \right)^2 - \frac{\sqrt{4}}{4 \times 1} = (x - 2)^2 - 1$

Donc :  $\alpha = -2$  et  $\beta = -1$

Par suite le tableau de variations de  $f$  est :

$a = 1 > 0$	x	$-\infty$	$-\alpha = 2$	$+\infty$
	f		$f(-\alpha) = \beta = -1$	

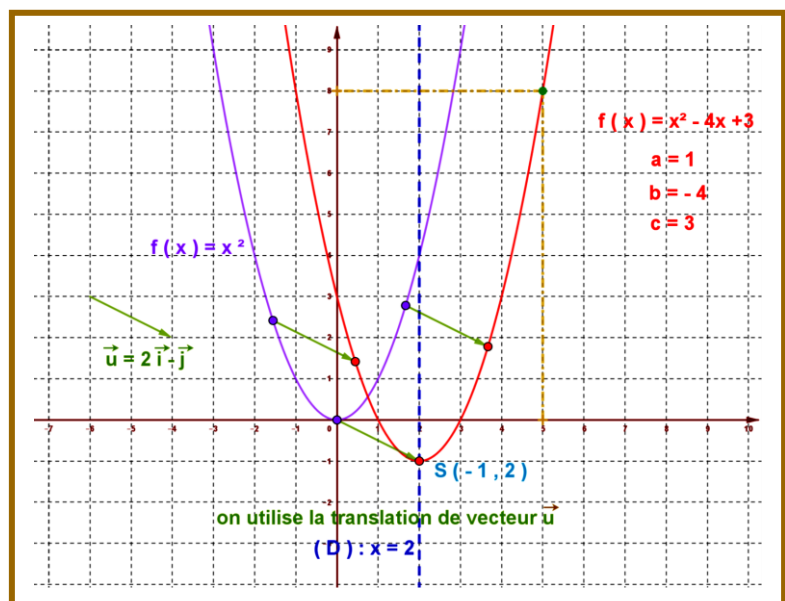
❖ La courbe représentative de  $f$  :

1<sup>ère</sup> méthode ( on utilise la translation )

✓ On construit la courbe d'équation  $f(x) = ax^2 = x^2$

✓ Puis la translate suivant le vecteur :

$$\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

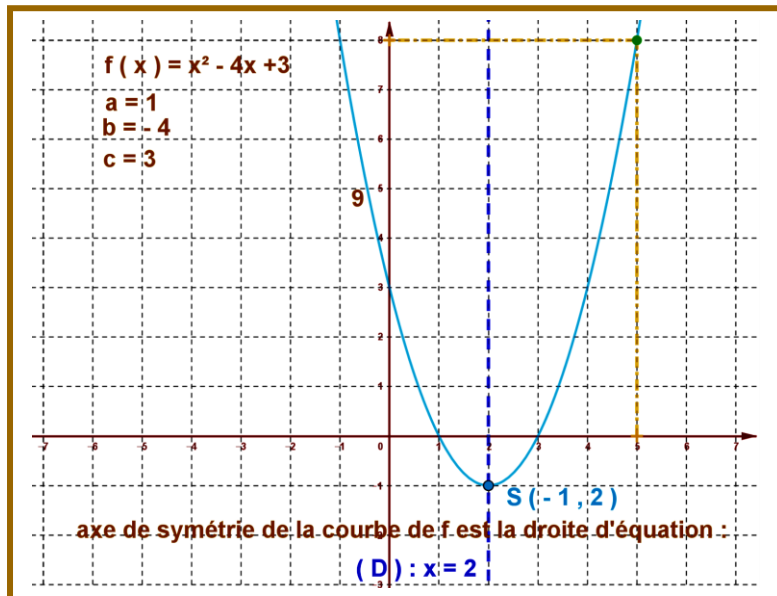


2<sup>ème</sup> méthode :

✓ On trace l'axe de symétrie la droite d'équation  $(D) : x = 2$ .

- ✓ On place le sommet qui est le point  $S(2;-1)$ .
- ✓ On donne quelques valeurs avec  $x \geq 2$
- ✓ On construit la partie de la courbe sur  $[2, +\infty[$  puis son symétrique par rapport à (D)

x	2	3	4	5	...
f(x)	-1	0	3	8	...



**D.** Fonction  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ; ( avec  $ad - bc \neq 0$  )

**a.** Propriété ( admise ) :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} ; \left( \text{avec } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \right) \text{ et } c \neq 0$$

- ❖ La fonction f s'écrit de la forme  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  et k de  $\mathbb{R}$  et  $x \neq -\alpha$ .
- ❖ La courbe représentative de la fonction f est un hyperbole , de centre le point  $S(-\alpha, \beta)$  ( du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ), de centre de symétrie le sommet le point  $S(-\alpha, \beta)$  .
- ❖ d'asymptote horizontale la droite d'équation (D) :  $y = \beta$  .
- ❖ d'asymptote verticale la droite d'équation (D') :  $x = -\alpha$  .
- ❖ On La courbe .représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur  $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$  de la courbe de  $f(x) = \frac{k}{x}$  ( hyperbole )

❖ le tableau de variation est :

• 1<sup>er</sup> cas  $\Delta > 0$  :

a > 0	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f	$\searrow$		$\searrow$

• 2<sup>ième</sup> cas  $\Delta < 0$  :

a < 0	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f	$\nearrow$		$\nearrow$

**b.** La courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

❖ Exemple  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$  ; ( $a=1 > 0$ ).  $a=1 > 0$  et  $b=-1$  et  $c=1$  et  $d=2$  et  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

❖ le tableau de variations est :

• on a :  $\Delta > 0$  :

$$\text{On a : } f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{-3}{x+2} = 1 + \frac{-3}{x+2}$$

d'où :  $\alpha = -2$  et  $\beta = 1$  et  $k = -3$

Par suite le tableau de variations de  $f$  est :

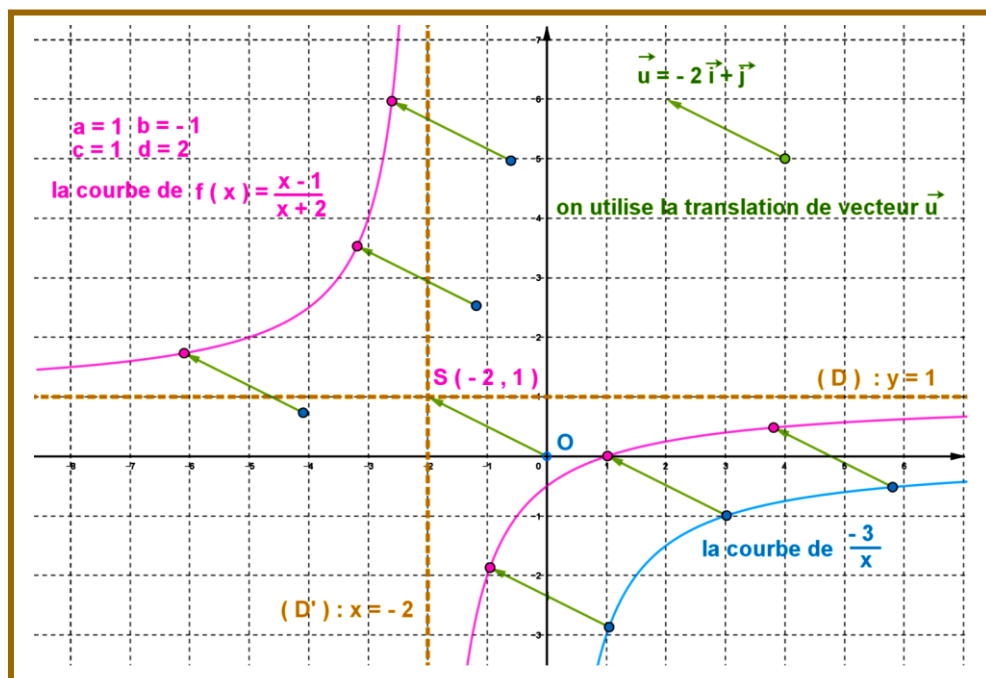
$\Delta = 3 > 0$	x	$-\infty$	$-\alpha = 2$	$+\infty$
	f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

❖ La courbe représentative de  $f$  :

1<sup>ère</sup> méthode

✓ On construit la courbe d'équation  $f(x) = \frac{k}{x} = \frac{-3}{x}$  (hyperbole)

✓ Puis la translate suivant le vecteur :  $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$ .



2<sup>ème</sup> méthode :

✓ On trace le sommet de l'hyperbole le point  $S(2; -1)$ . ( Centre de symétrie de l'hyperbole )

✓ On trace :

❖ l'asymptote horizontale qui est la droite d'équation  $(D) : y = \beta = 1$  .

❖ l'asymptote verticale qui est la droite d'équation  $(D') : x = -\alpha = -2$  .

✓ On donne quelques valeurs avec  $x \geq -2$

- ✓ On construit la partie de la courbe sur  $]-2, +\infty[$  puis son symétrique par rapport au point  $S(2; -1)$  (centre de l'hyperbole) pour obtenir la partie du courbe sur l'intervalle  $]-\infty, -2[$ .

<b>x</b>	$-\frac{4}{3}$	-1	0	1	2
<b>f(x)</b>	$-\frac{7}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$

