Tronc commun science	Les fonctions numériques	prof: atmani najib

Correction :

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

1. a) On a $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x^2\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1 \quad \text{et} \quad x\neq -1\}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

   b) Pour déterminer les antécédents de $\dfrac{4}{3}$ il suffit de résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{4}{3}$

   On a $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{4}{3} \iff 6x=4x^2-4 \iff 4x^2-6x-4=0 \iff 2x^2-3x-2=0$

   et $\Delta=25$ donc les antécédents de $\dfrac{4}{3}$ sont $x=\dfrac{3-5}{4}=\dfrac{-1}{2}$ ou $x=\dfrac{3+5}{4}=2$

2. On a $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ donc symétrique par rapport à 0

   et $f(-x)=\dfrac{-2x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{2x}{x^2-1}=-f(x)$ donc f est impaire (car $(-x)^2=x^2$)

3. a) Pour x et y deux éléments distincts de D_f on a

$$T=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2y}{y^2-1}}{x-y}=\frac{2x(y-1)-2y(x-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{-2xy(x-y)-2(x-y)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{-2xy-2}{(x^2-1)(y^2-1)}$$

   b) Sur l'intervalle $[0;1[$ on a $0\leq x<1$ et $0\leq y<1$ donc $-1\leq y^2-1<0$, $-1\leq x^2-1<0$ et $-4<-2xy-2\leq -2$ donc $T<0$ d'où f est décroissante sur $[0;1[$

   Sur l'intervalle $]1;+\infty[$ on a $1<x$ et $1<y$ donc $x^2-1>0$, $y^2-1>0$ et $-2xy-2<-4$ donc $T<0$ d'où f est décroissante sur $]1;+\infty[$

   c) On a f est impaire et décroissante sur $]1;+\infty[$ donc décroissante sur $]-\infty;1[$

   f est impaire et décroissante sur $[0;1[$ donc décroissante sur $]-1;0]$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$	0	$\searrow$	||	$\searrow$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x-|x+2|+|x-2|$

1. On a $D_f=\mathbb{R}$ donc symétrique par rapport à 0

   et $f(-x)=-x-|-x+2|+|-x-2|=-x-|x-2|+|x+2|=-(x+|x-2|-|x+2|)=-f(x)$

   car $|-x+2|=|x-2|$ et $|-x-2|=|x+2|$

   donc f est impaire.

2. On a

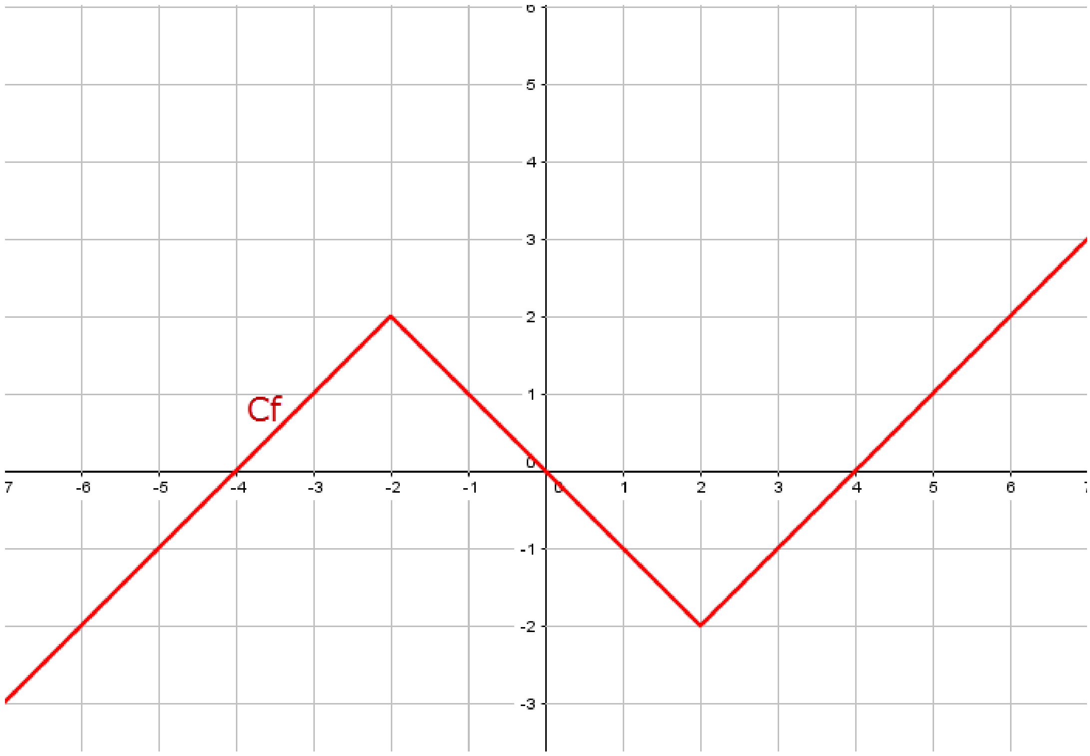
$$\begin{cases} f(x) = x+4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ f(x) = -x & \text{si} \quad -2 \le x \le 2 \\ f(x) = x-4 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

x	$-\infty$ -2		2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0 $+$		$+$
$\|x+2\|$	$-x-2$	0 $x+2$		$x+2$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\|x-2\|$	$2-x$	$2-x$	0	$x-2$
$x-\|x+2\|+\|x-2\|$	$x+4$	$-x$		$x-4$

3. Sur $]-\infty;2]$ on a C_f est une demi-droite d'équation $y = x+4$

Sur $[-2;2]$ on a C_f est un segment d'équation $y = -x$

Sur $[2;+\infty[$ on a C_f est une demi-droite d'équation $y = x-4$



4. Tableau des variations de f.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

5. Les extrémums de la fonction f

2 est la valeur maximale de f sur l'intervalle $]-\infty;2]$

-2 est la valeur minimale de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Exercice3:

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x)=-x^2+4x-5$ et $g(x)=\dfrac{-x+3}{x-2}$

1. a) Pour x et y deux éléments distincts de D_g on a

$$T=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=\frac{\frac{-x+3}{x-2}-\frac{-y+3}{y-2}}{x-y}=\frac{(-x+3)(y-2)-(-y+3)(x-2)}{(x-2)(y-2)(x-y)}=\frac{-x+y}{(x-2)(y-2)(x-y)}=\frac{-1}{(x-2)(y-2)}$$

Sur l'intervalle $]-\infty;2[$ on a $x<2$ et $y<2$ donc $x-2<0$ et $y-2<0$ d'où $T<O$

donc g est décroissante sur $]-\infty;2[$

Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ on a $x>2$ et $y>2$ donc $x-2>0$ et $y-2>0$ d'où $T<O$

donc g est décroissante sur $]2;+\infty[$

b) Le tableau des variations de g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

La courbe C_g est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(2;-1)$ et d'asymptote $x=2$ et $y=-1$

2. a) L'expression canonique de $f(x)$

On a $f(x)=-x^2+4x-5=-(x^2-4x+5)=-(x^2-4x+4+1)=-(x-2)^2-1$ (On complète l'identité)

On sait que $-(x-2)^2\leq 0$ donc $-(x-2)^2-1\leq -1$ d'où $f(x)\leq -1$ et puisque $f(2)=-1$

donc -1 est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

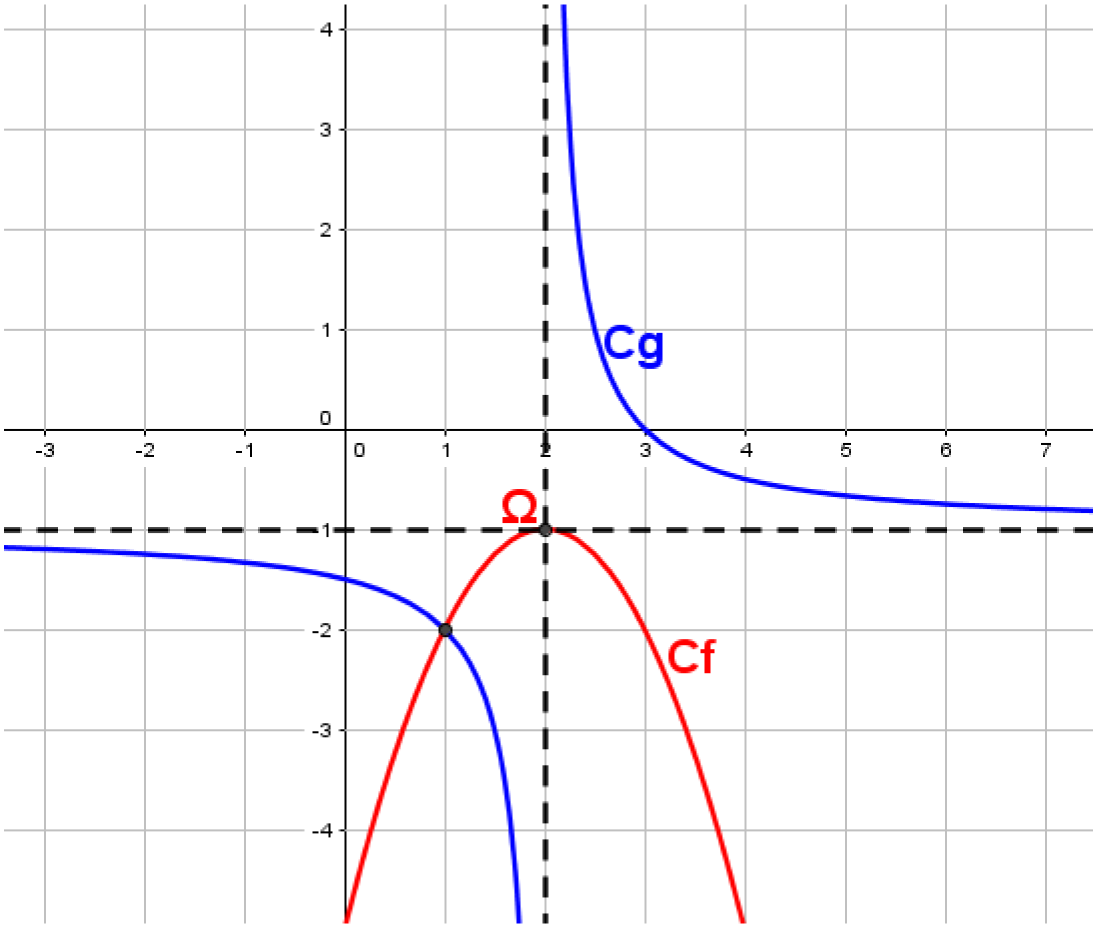
b) Le tableau des variations de f

f est un polynôme du second degré avec a<0 donc C_f est une parabole de sommet $\Omega(2;-1)$

C_f est ouverte vert le bas

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

3. Construire dans le même repère les deux courbes C_f et C_g



4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

On cherche les intervalles où C_f est en dessous de C_g

D'après la figure l'ensemble des solutions est $S =]-\infty;1] \cup]2;+\infty[$