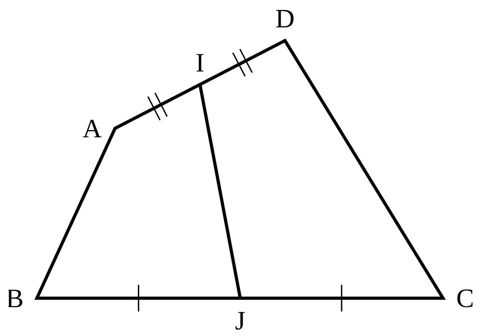
Série d'exercice sur les vecteurs;colinéarité angle orienté et Trigonométrie

Rappels sur les vecteurs

EXERCICE 1

ABCD est un quadrilatère quelconque, I le milieu de [AD] et J celui de [BC].

1) Écrire $\overrightarrow{IJ}$ comme la somme de $\overrightarrow{AB}$ et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
2) Décomposer le même $\overrightarrow{IJ}$ en utilisant $\overrightarrow{DC}$.
3) En déduire que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.



EXERCICE 2

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB] et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
2) Justifier les égalité : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
3) Quel théorème vous permet de conclure que O, I et J sont alignés ?

EXERCICE 3

ABC est un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I est tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que I, E et F sont alignés.

EXERCICE 4

ABCD est un parallélogramme, M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe (BC) en P. Il s'agit de trouver le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$. Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

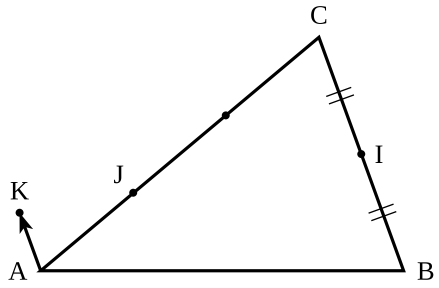
1) Calculer les coordonnées des points M, N et Q.
2) Justifier que P a pour coordonnées $(1 ;\ k)$.
3) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires et calculer k.

Exercice 5

Sur la figure ci-contre, I est le milieu de [BC], J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Calculer les coordonnées de I, J et K puis prouver que I, J et K sont alignés.



Coordonnées et repère orthonormé

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(-1\ ;\ 1)$, $B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 2\right)$, $C\left(-\frac{3}{4};\ \frac{7}{6}\right)$

b) $A(-5;\ 2)$, $B(3\ ;-1)$, $C(8\ ;-3)$

Exercice 7

On donne les points $A(-2\ ;\ 3)$, $B(4\ ;\ 5)$, $C(27\ ;\ 9)$. Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

Exercice 8

On donne les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ 4)$, $C(2\ ;-3)$ et la droite d d'équation $x = 5$.

a) Faire une figure dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) M est un point de la droite d tel que les droites (AB) et (CM) sont parallèles. Déterminer l'ordonnée du point M.

Exercice 9

On donne les points $A(-3\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 6)$, $C(2\ ;-4)$ et $D(7\ ;\ 6)$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].

Les points M et N sont définis par : $5\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$ et $5\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA}$

a) Calculer les coordonnées de I, J, M et N.

b) Le point K étant le milieu du segment [MN], démontrer que les point I, J et K sont alignés.

Équation cartésienne d'une droite

Exercice 10

On donne les coordonnées des points A et B, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans les cas suivants :

a) $A(1\ ;\ 5)$ et $B(-3\ ;\ 2)$

b) $A(3\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 2)$

c) $A(4\,;\,2)$ et $B(4\,;-3)$ d) $A(2\,;-2)$ et $B(4\,;-2)$

Exercice 11

On donne une équation cartésienne de la droite d : $2x - 3y + 5 = 0$

1) a) Donner un vecteur directeur de la droite d.

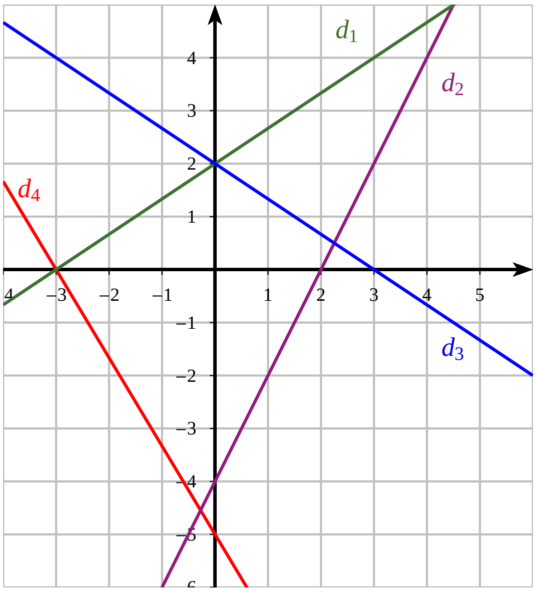
b) Quel est le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de son équation réduite ?

2) Le point A d'ordonnée $\frac{3}{2}$ est un point de d. Quelle est son abscisse ?

Exercice 12

Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont représentées ci-contre.

Déterminer une équation cartésienne pour chacune de ces droites.



Exercice 13

On donne les équations cartésiennes des droites d et d' suivantes :

d : $7x - 3y + 2 = 0$ et d' : $5x - 2y - 8 = 0$

a) Démontrer que les droites d et d' sont sécantes.

b) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

Exercice 14

Les droites d_1 et d_2 ont respectivement comme équation cartésienne

d_1 : $3x - 2y - 8 = 0$ et d_2 : $5x + 4y - 6 = 0$.

La droite Δ a pour équation : $2mx - (m+1)y - 8 = 0$

Comment choisir le paramètre m pour que ces trois droites soient concourantes ?

Exercice 15

Trouver une équation de la droite Δ passant par le point $A(-1;\ 4)$ et parallèle à la droite d d'équation $3x - 2y + 1 = 0$

Exercice 16

Pour quelle valeur du paramètre m la droite d d'équation $mx - 3y + 2 = 0$ est-elle parallèle à la droite Δ d'équation $3x - 2y + 4 = 0$

Le radian et le cercle trigonométrique

Exercice 17

Convertir en radians les mesures données en degrés :

$$10^\circ \quad ; \quad 59^\circ \quad ; \quad 180^\circ \quad ; \quad 18^\circ \quad ; \quad 72^\circ \quad ; \quad 112,5^\circ$$

Exercice 18

Convertir en degré les mesures données en radians :

$$\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \pi \quad ; \quad \frac{5\pi}{4} \quad ; \quad \frac{3\pi}{8} \quad ; \quad \frac{5\pi}{12} \quad ; \quad \frac{3\pi}{2}$$

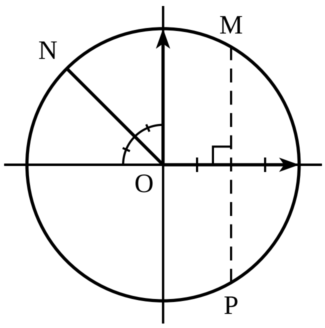
Exercice 19

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points images des angles en radians suivants :

a) π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) $-\frac{\pi}{3}$ f) $-\frac{3\pi}{4}$ g) $\frac{5\pi}{6}$ h) $-\frac{3\pi}{2}$

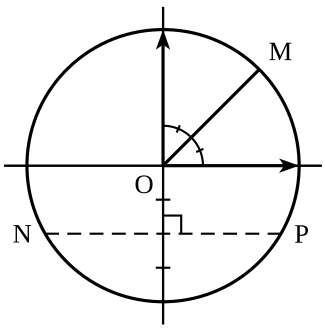
Exercice 20

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[0\ ;\ 2\pi]$ repérant les points M, N et P.



Exercice 21

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ repérant les points M, N et P.



Exercice 22

Sur le cercle trigonométrique colorier l'arc décrit par l' intervalle I dans les cas suivants :

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \quad ; \quad I = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}\right] \quad ; \quad I = \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

Mesure principale

Exercice 23

Dans chaque cas, trouver la mesure principale de l'angle orienté de mesure α donnée :

a) $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$ b) $\alpha = -\dfrac{4\pi}{3}$ c) $\alpha = \dfrac{35\pi}{6}$ d) $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4}$

e) $\alpha = \dfrac{202\pi}{3}$ f) $\alpha = 330^\circ$

Propriétés des angles orienté

Exercice 24

On donne la mesure de l'angle orienté suivant : $(\vec{u}\,,\ \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Donner la mesure de chacun des angles orientés indiqués.

a) $(\vec{v}\,,\ 2\vec{u})$ b) $(\vec{v}\,,\ -3\vec{u})$ c) $(-3\vec{u}\,,\ 2\vec{v})$ d) $(-\vec{v}\,, -\vec{u})$

Exercice 25

ABC est un triangle rectangle direct en A tel que : $(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{5}$

Calculer la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{CB})$

Exercice 26

AIL est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AL}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Les triangles BAL et CIL sont rectangles isocèles avec $(\overrightarrow{LB}\,;\overrightarrow{LA}) = (\overrightarrow{IL}\,;\overrightarrow{IC}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Le but de l'exercice est de calculer $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ et d'en tirer une conséquence.

a) Faire une figure.

b) Quel théorème vous permet d'écrire : $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AL})+(\overrightarrow{AL}\,;\overrightarrow{AI})+(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AC})$
Quel est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IAC}$?
En déduire une mesure de : $(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$.

c) Que pouvez vous dire des point A, B et C ?

Lignes trigonométriques

Exercice 27

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{7\pi}{6}$ d) $\dfrac{11\pi}{6}$ e) $\dfrac{13\pi}{6}$

Exercice 28

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{9\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{81\pi}{4}$ e) $-\frac{108\pi}{4}$

Exercice 29

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{71\pi}{3}$ d) $\frac{97\pi}{3}$ e) $-\frac{54\pi}{3}$

Relations trigonométriques

Exercice 30

À l'aide de la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et de $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$,

a) Déterminer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

b) Déterminer $\sin x$ sachant que : $\cos x = -\frac{1}{5}$ et $x \in [-\pi\,;\,0]$

c) Déterminer $\cos x$ et $\tan x$ sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

Exercice 31

Dans chacun des cas suivants, calculer $\cos x$ ou $\sin x$ puis $\tan x$.

a) $\sin x = -\frac{1}{4}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

b) $\cos x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$.

c) $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

Exercice 32

Démontrer que pour tout réel x on a :

a) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

b) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\cos x \sin x$

Exercice 33

Exprimer à l'aide de $\sin x$ et $\cos x$, les expressions suivantes :

a) $\sin(-x) + \cos(-x)$

b) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$

c) $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$

Équations trigonométriques

Exercice 34

À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin x = 0$ c) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

Exercice 35

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

a) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ b) $1 - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$

c) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ d) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Exercice 36

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

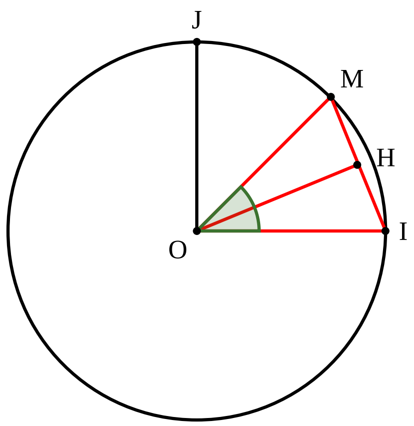
a) $\cos 2x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

c) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ d) $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 37

Calcul de sinus et cosinus $\dfrac{\pi}{8}$

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O , I , J) du plan.
M est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.



1) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O , I , J) ?
2) Calculer la distance IM.
3) a) Démontrer que : $IM = 2 \times \sin\dfrac{\pi}{8}$.
   b) En déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
4) Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.
5) Déduire des questions précédentes, les lignes trigonométriques de : $\dfrac{7\pi}{8}$, $\dfrac{9\pi}{8}$, $\dfrac{5\pi}{8}$ et $\dfrac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 38

Calcul de sinus et cosinus $\frac{\pi}{12}$

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O , I , J) du plan.
M est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

1) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O , I , J) ?
2) Calculer la distance IM.
3) a) Démontrer que : $IM = 2 \times \sin\frac{\pi}{12}$.
   b) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.
   c) Montrer que l'on peut mettre $\sin\frac{\pi}{12}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4) a) Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.
   b) Montrer que l'on peut mettre $\cos\frac{\pi}{12}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
5) Déduire des questions précédentes, les lignes trigonométriques de :
   $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{8}$.