# Serie N°11 : Trigonométries

## Exercice 01:

Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

1. Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ ;
   $$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$$
2. Montrer que $f$ est une fonction périodique de période $\pi$
3. Montrer que $f(x)\geq 0$ pour tout $x$ de $\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]$

## Exercice 02:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2}\sin(x)+1=0$
2. En déduire les les solutions de l'équation :
   $\sqrt{2}\sin(x)+1=0$ dans $]-\pi,\pi]$

## Exercice 03:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$ ; $\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
2. $\cos(2x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ; $\cos^2(x)=\frac{1}{2}$
3. $|\cos(2x)|=\frac{1}{2}$ ; $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=0$

## Exercice 04:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x)=\sin^2(x)$
2. $\cos(x)=2\sin^2(x)$
3. $\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}$

## Exercice 05:

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(x)=-\frac{1}{2}$ .puis porter les solutions sur un cercle trigonométrique
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos(x)<-\frac{1}{2}$
3. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ l'inéquation
   $$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1<0$$

## Exercice 06:

Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points $M$ du cercle associés aux réels $x$ vérifiant:

a) $0\leq\cos x\leq\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}\leq\sin(x)\leq 1$

## Exercice 07:

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation :
   $\left(1-\sqrt{2}\cos(x)\right)\sin(x)=0$
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation :
   $\left(1-\sqrt{2}\cos(x)\right)\sin(x)<0$

## Exercice 08:

Soit $P(x)=4\sin^2(x)-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin(x)-\sqrt{6}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $4X^2-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{6}=0$
2. en déduire une factorisation du polynôme
   $4X^2-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{6}$
3. résoudre dans $]0;2\pi]$ l'équation $P(x)=0$
4. factoriser $P(x)$ puis résoudre dans $]0;2\pi]$ l'inéquation $P(x)<0$

## Exercice 09:

On pose $A(x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+5\pi)-1$

1. Montrer que : $A(x)=\left(\cos(x)+1\right)\left(2\cos(x)-1\right)$
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation :
   $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+5\pi)-1=0$
3. Représenter les solutions de cette équation sur un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
4. Soient $A, B$ et $C$ les points obtenus. Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral.

## Exercice 10:

$ABC$ est un triangle rectangle en $A$ tel que $BC=2a$ $(a>0)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

Soit $O$ le milieu du segment $[BC]$ et $H$ le projeté orthogonal du point $A$ sur $(BC)$

1. Montrer que $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
2. Déduire que $OH=AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ et que
   $AB=a\sqrt{2+\sqrt{2}}$
3. Dans le triangle $AHB$ , calculer :
   $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$