prof: atmani najib

Corrigés des exercices de trigonométrie

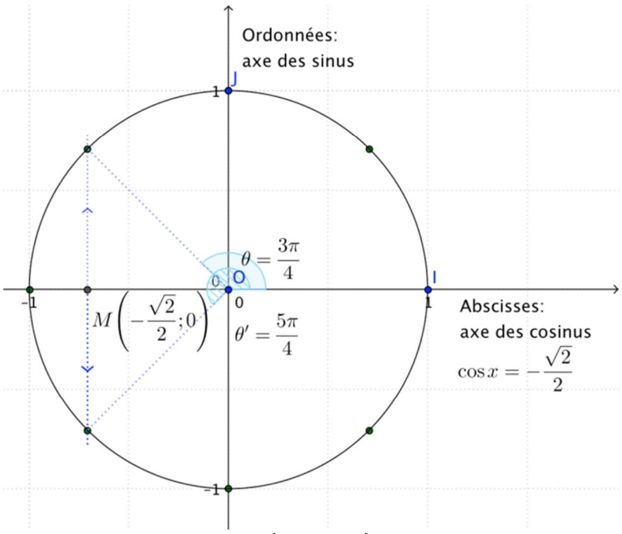
I. Résoudre algébriquement des équations, des inéquations

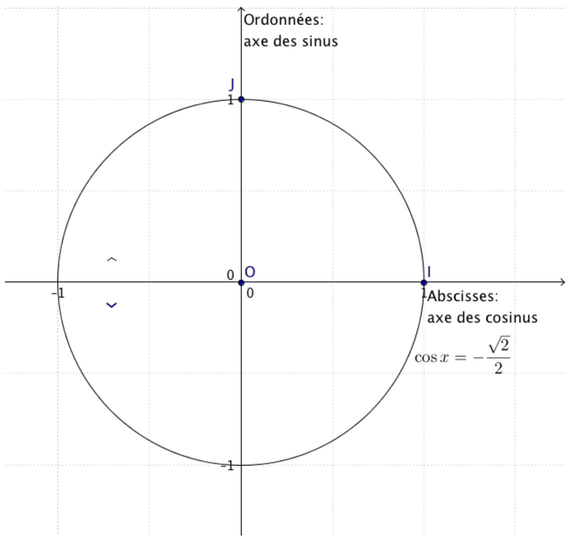
Pour les exercices suivants, on utilisera le cercle trigonométrique

Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :





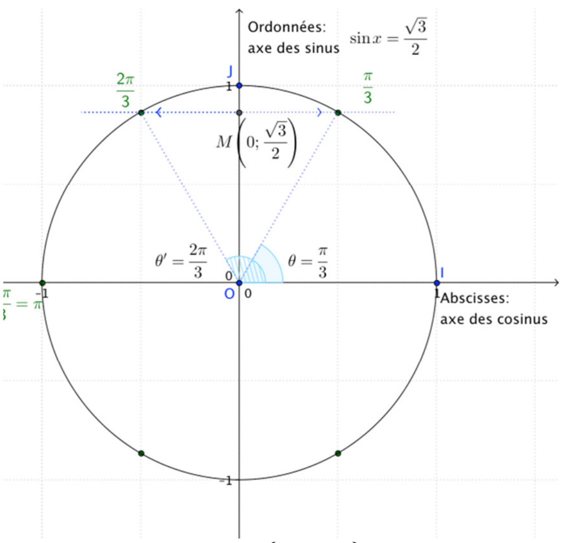
Les solutions sont $S = \left\{ \dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

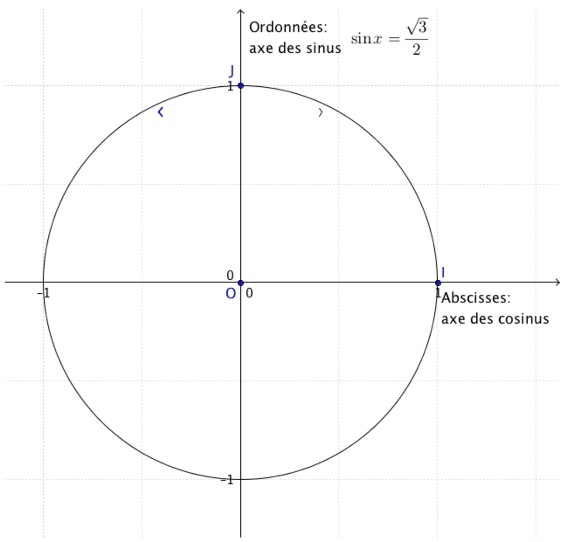
Exercice 2

€

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction :





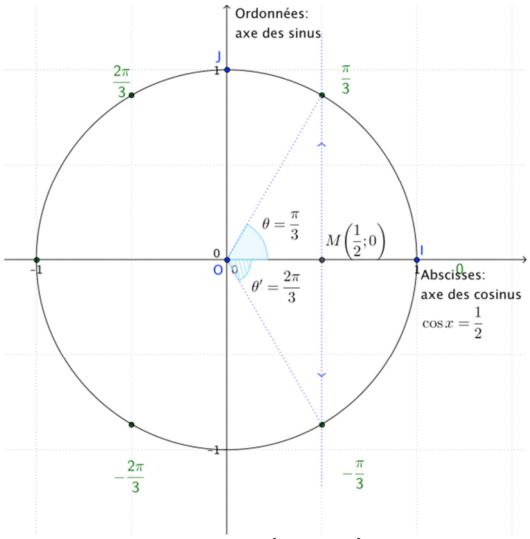
Les solutions sont $S = \left\{ \dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3} \right\}$

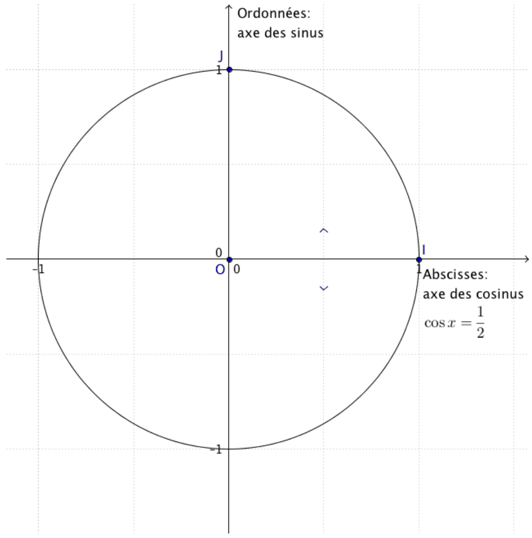
€

Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Correction :



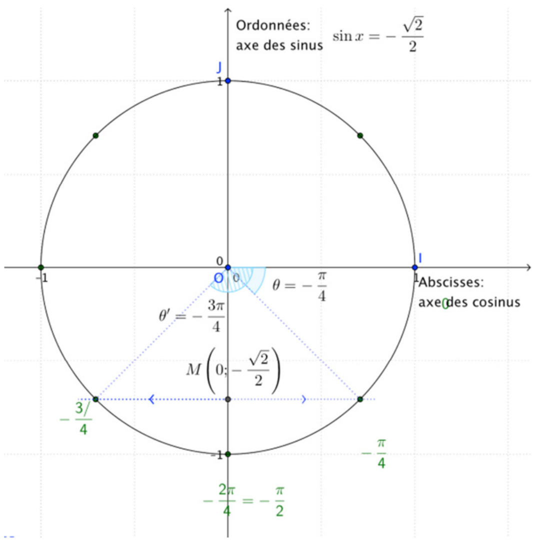


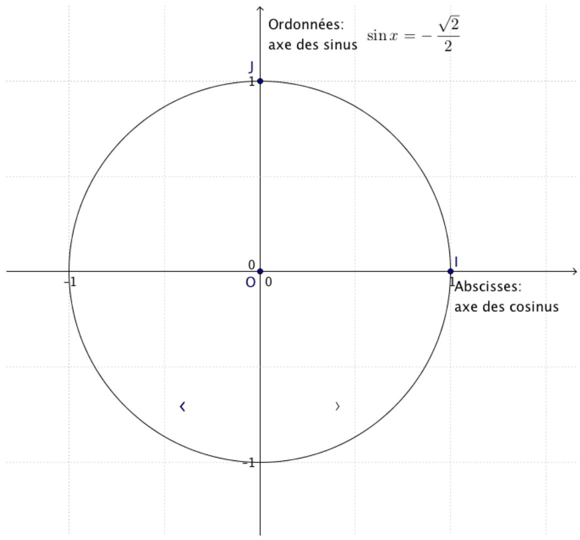
Les solutions sont $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right\}$

Exercice 4€

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :

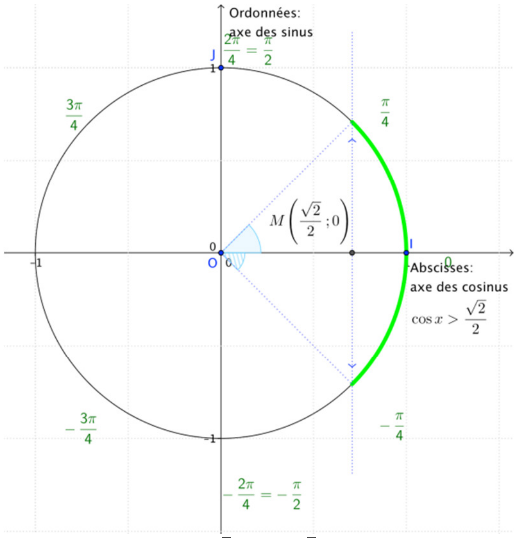


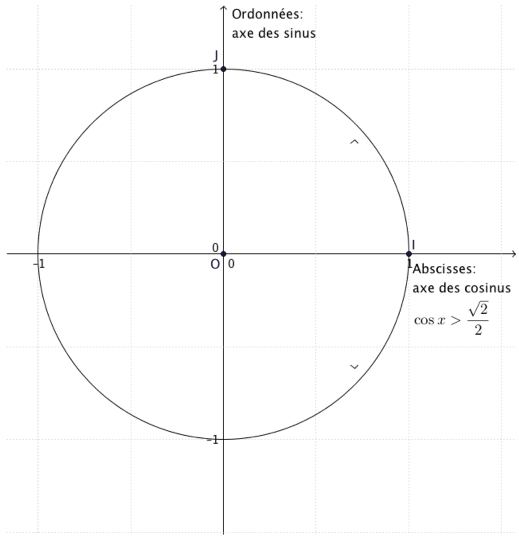


Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :





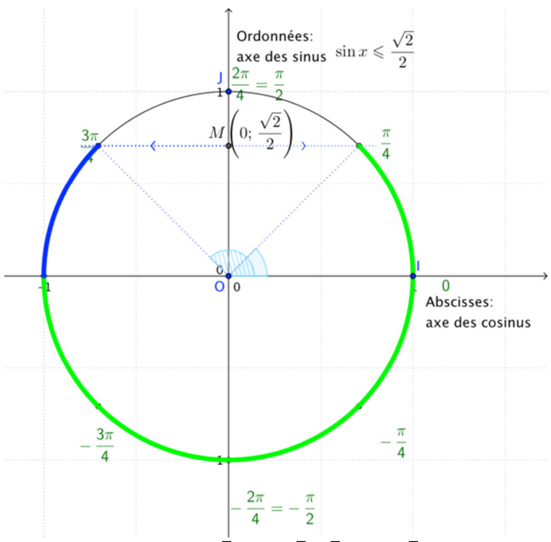
Les solutions sont $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$

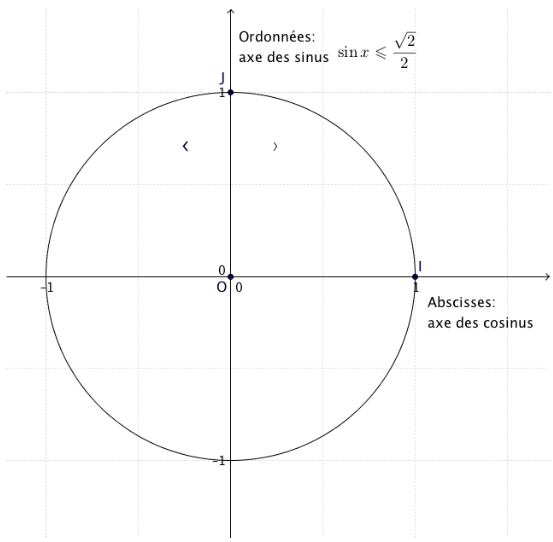
€

Exercice 6

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'inéquation $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :





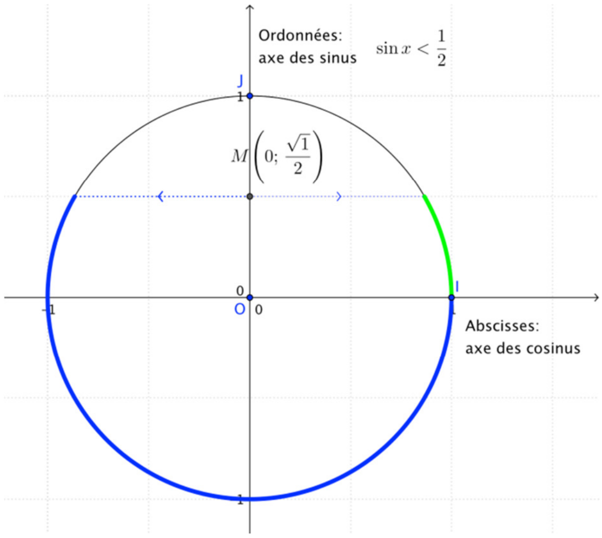
Les solutions sont $\left]-\pi;\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$

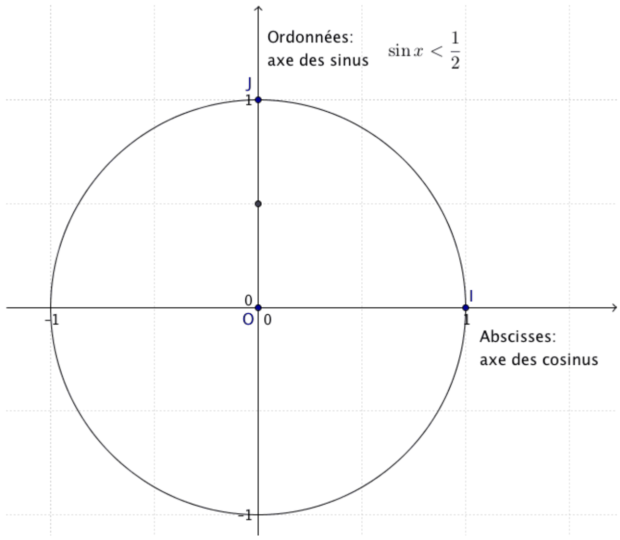
€

Exercice 7

Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;2\pi\ ]$ l'inéquation $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

Correction :

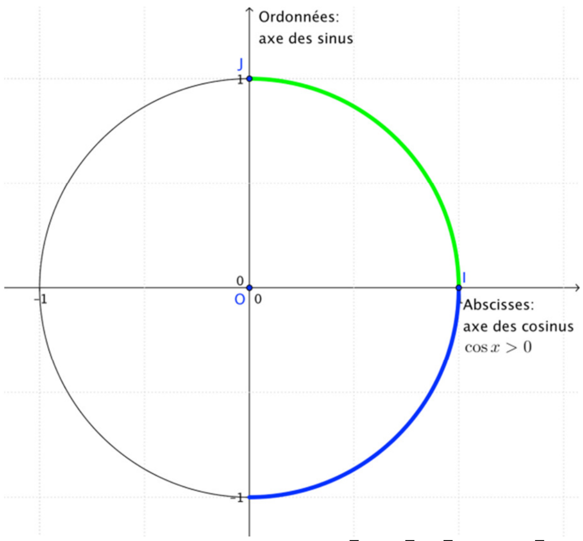


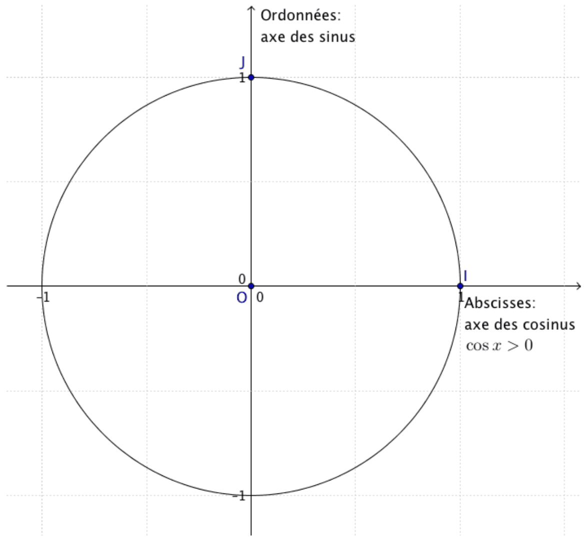


Exercice 8

Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;2\pi\ ]$ l'inéquation $\cos x > 0$.

Correction :





L'ensemble des solutions est $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

€

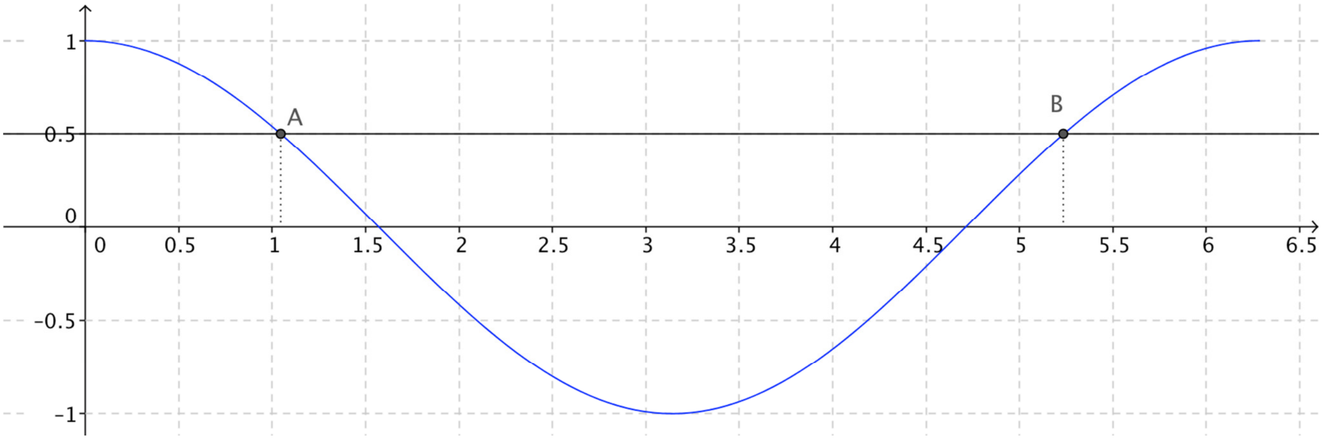
II. Résoudre graphiquement des équations

Exercice 9

On a tracé sur l'intervalle $[0\,;2\pi\,]$ la représentation graphique de la fonction cosinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[0\,;2\pi\,]$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Correction :



Graphiquement, on lit que les solutions sont $x_1 \approx 1{,}05$ (soit $x_1 = \frac{\pi}{3}$) et $x_2 \approx 5{,}25$ (soit $x_2 = \frac{5\pi}{3}$).

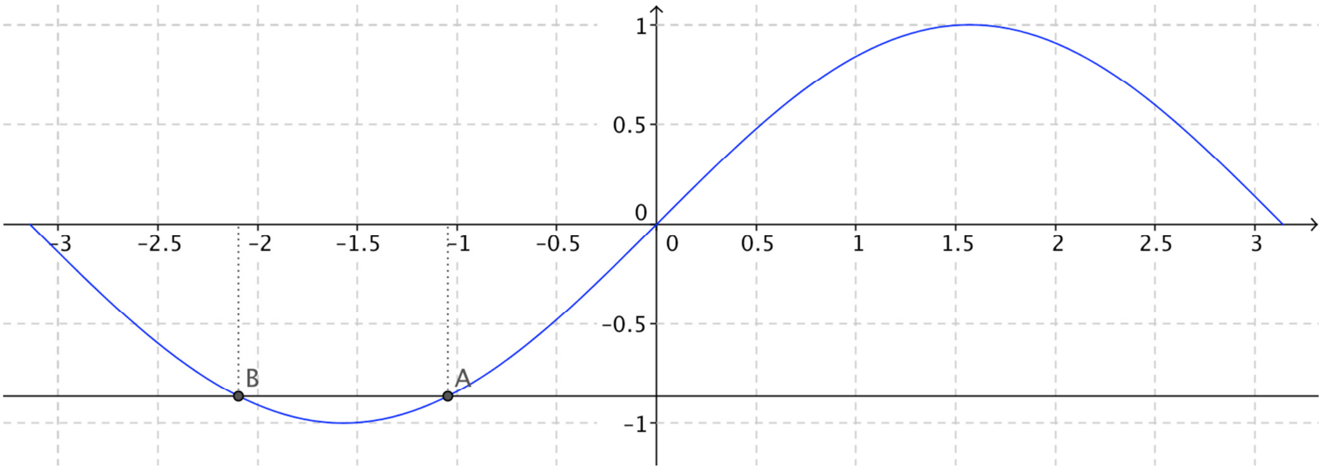
€ € € €

Exercice 10

On a tracé sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi\,]$ la représentation graphique de la fonction sinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi\,]$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction :



Graphiquement, on lit que les solutions sont $x_1 \approx -1{,}05$ (soit $x_1 = -\frac{\pi}{3}$) et $x_2 \approx -2{,}1$ (soit $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$).

III. Etudier le signe d'une expression

Exercice 11

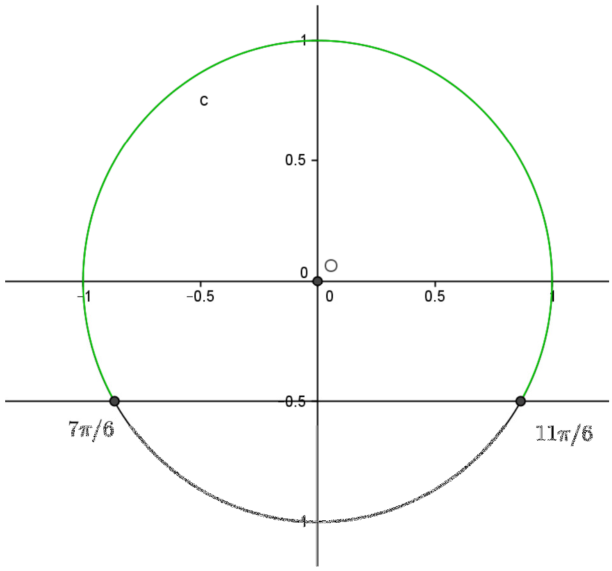
On considère la fonction définie sur $[0\ ;\ 2\pi[$ par $f(x)=2\sin x+1$.

a. Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation $\sin x>-\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$.

Correction :

a. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x>-\dfrac{1}{2}$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$ est $\left[0\ ;\ \dfrac{7\pi}{6}\right[\cup\left]\dfrac{11\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right[$



b. $f(x)>0\Leftrightarrow 2\sin x+1>0\Leftrightarrow 2\sin x>-1\Leftrightarrow \sin x>-\dfrac{1}{2}$.

On en déduit alors le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$, en utilisant a. :

x	0		$\dfrac{7\pi}{6}$		$\dfrac{11\pi}{6}$		2π
$f(x)$		+	0	_	0	+	

Exercice 12

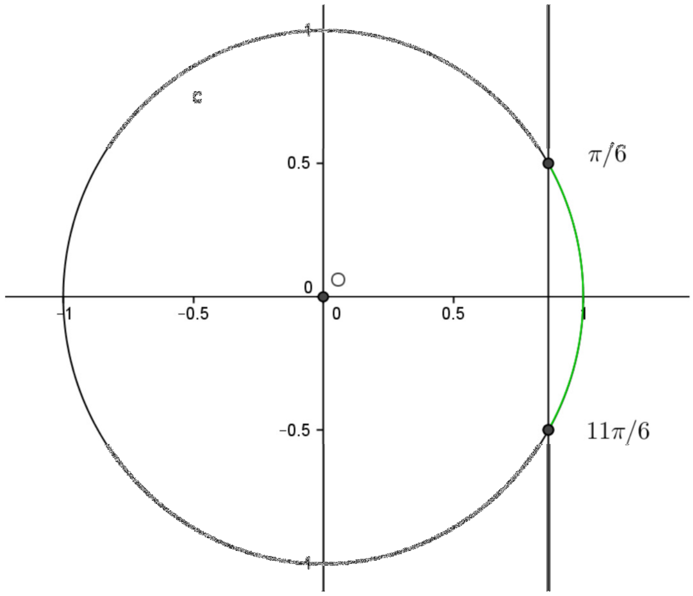
On considère la fonction définie sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x)=2\cos x-\sqrt{3}$.

a. Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation $\cos x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Correction :

a. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$ est $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right[$



b. $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow 2\cos x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit alors le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$, en utilisant a. :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f(x)$		+	0	_	0	+	

Exercice 13

On considère la fonction définie sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

a. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Correction :

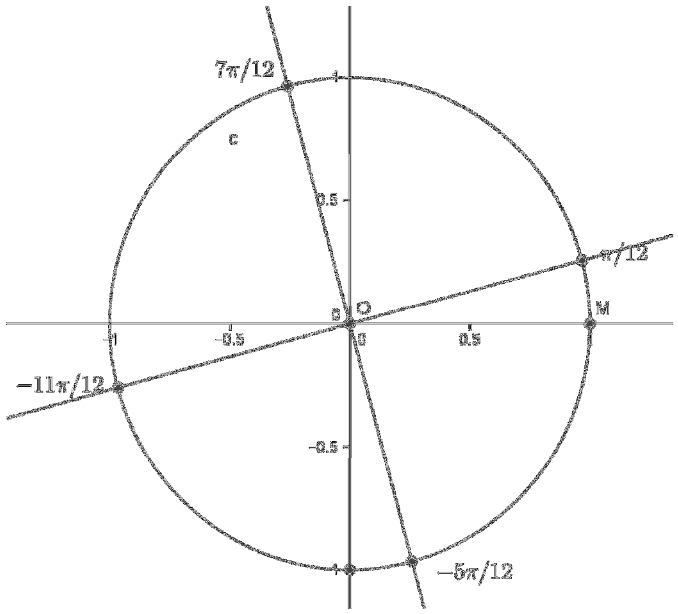
$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \ (k\in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \ \text{ou} \ \ 2x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\,(k\in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \ \text{ ou } \ x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi \ (k\in \mathbb{Z})$$

Dans l’intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, les solutions sont $-\frac{11\pi}{12}\ ;-\frac{5\pi}{12}\ ;\ \frac{\pi}{12}\ ;\ \frac{7\pi}{12}$.



Sur l’intervalle $\left]-\pi\ ;-\frac{11\pi}{12}\right[$,

$-\pi<x<-\frac{11\pi}{12}$ puis $-2\pi<2x<-\frac{11\pi}{6}$ et $-2\pi+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ donc

$-\frac{7\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{3\pi}{2}$ et $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$;

Sur l’intervalle $\left]-\frac{11\pi}{12}\ ;-\frac{5\pi}{12}\right[$,

$-\frac{11\pi}{12}<x<-\frac{5\pi}{12}$ puis $-\frac{11\pi}{6}<2x<-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ donc

$-\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$;

Sur l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{12}\,;\,\frac{\pi}{12}\right[$,

$-\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$ puis $-\frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3} < 2x+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ donc

$-\frac{\pi}{2} < 2x+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) > 0$;

Sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{12}\,;\,\frac{7\pi}{12}\right[$,

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}$ puis $\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{7\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} < 2x+\frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ donc

$\frac{\pi}{2} < 2x+\frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$ et $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) < 0$;

Sur l'intervalle $\left]\frac{7\pi}{12}\,;\,\pi\right[$,

$\frac{7\pi}{12} < x < \pi$ puis $\frac{7\pi}{6} < 2x < 2\pi$ et $\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3} < 2x+\frac{\pi}{3} < 2\pi+\frac{\pi}{3}$ donc

$\frac{3\pi}{2} < 2x+\frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$ et $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) > 0$.

On peut alors résumer ces résultats :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

IV. Utiliser la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus

Exercice 14

On considère la fonction *f* définie sur ∡ par $f(x) = x\sin x$. Démontrer que *f* est paire.

Correction :

La fonction *f* est définie sur ∡ par $f(x) = x\sin x$.

Pour tout réel *x*, $f(-x) = (-x)\sin(-x)$, or $\sin(-x) = -\sin x$, donc

$f(-x) = -x(-\sin x) = x\sin x = f(x)$; **la fonction *f* est donc paire.**

Exercice 15

On considère la fonction *f* définie sur ∡ par $f(x) = x + \sin x$. Démontrer que *f* est impaire.

Correction :

La fonction *f* est définie sur ∡ par $f(x) = x + \sin x$.

Pour tout réel *x*, $f(-x) = -x + \sin(-x)$; or $\sin(-x) = -\sin x$, donc

$f(-x) = -x - \sin(x) = -(x + \sin x) = -f(x)$; **la fonction *f* est donc impaire.**

Exercice 16

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$. Démontrer que *f* est périodique de période π.

Correction :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$. Pour tout réel *x*,

$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x + 2\pi)$; or $\sin(a + 2\pi) = \sin a$, donc

$f(x+\pi) = \sin(2x) = f(x)$; **la fonction *f* est donc périodique de période π.**

Exercice 17

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$. Démontrer que *f* est périodique de période 6π.

Correction :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Pour tout réel *x*, $f(x+6\pi) = \cos\left(\frac{x+6\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$, or

$\cos(a + 2\pi) = \cos a$, donc $f(x+6\pi) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$; **la fonction *f* est donc périodique de période 6π.**

V. Etudier des limites

Exercice 18

Etudier la limite en 0 de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3\sin x}{x}$.

Correction :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3\sin x}{x}$.

$f(x) = 3 \times \frac{\sin x}{x}$, or on sait d'après le cours que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc par produit : $\lim_{x \to 0} 3\frac{\sin x}{x} = 3$

Exercice 19

Etudier la limite en 0 de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x}$.

Correction :

La fonction f est définie sur $∡^*$ par $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{2x}$.

$f(x)=\dfrac{\cos x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\cos x-1}{x}$, or on sait d'après le cours que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=0$.

Exercice 20

Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $∡$ par $f(x)=\sin x-x$.

Correction :

La fonction f est définie sur $∡$ par $f(x)=\sin x-x$.

On sait que, pour tout réel x, $-1\le \sin x\le 1$, donc $-1-x\le \sin x-x\le 1-x$, puis $f(x)\le 1-x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Exercice 21

Etudier la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $∡$ par $f(x)=\cos 2x+x$.

Correction :

La fonction f est définie sur $∡$ par $f(x)=\cos 2x+x$.

On sait que, pour tout réel x, $-1\le\cos(2x)\le 1$, donc $-1+x\le\cos(2x)+x\le 1+x$, puis $f(x)\le 1+x$. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)=-\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

VI. Calculer des dérivées

Exercice 22

On considère la fonction définie sur $∡$ par $f(x)=x\sin x$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur $∡$ par $f(x)=x\sin x$.

On remarque que $f=u\times v$ avec $\begin{cases} u(x)=x & ;u'(x)=1 \\ v(x)=\sin x & ;v'(x)=\cos x \end{cases}$;

Pour tout réel x, $f'(x)=1\times\sin x+x\times\cos x=\sin x+x\cos x$.

Exercice 23

On considère la fonction définie sur ∡* par $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur ∡* par $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$.

On remarque que $f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=\cos x & ; u'(x)=-\sin x \\ v(x)=x & ; v'(x)=1 \end{cases}$;

Pour tout réel *x*, $f'(x)=\dfrac{-(\sin x)\times x-\cos x}{x^2}=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$.

Exercice 24

On considère la fonction définie sur ∡ par $f(x)=\sin(2x)$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur ∡ par $f(x)=\sin(2x)$.

On remarque que $f=\sin u$ avec $u(x)=2x$; $u'(x)=2$;

On sait que $(\sin u)'=u'\cos u$, donc pour tout réel *x*, $f'(x)=2\cos(2x)$.

Exercice 25

On considère la fonction définie sur ∡ par $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur ∡ par $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

On remarque que $f=\cos u$ avec $u(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}$; $u'(x)=\dfrac{1}{2}$;

On sait que $(\cos u)'=-u'\sin u$, donc pour tout réel *x*, $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

VII. Etude d'une fonction

Exercice 26

Soit *f* la fonction dérivable sur $[0;\pi]$, définie par $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\cos(x)+\dfrac{3}{2}$.

Vérifier que $f'(x)=\sin(x)\left[2\cos(x)-1\right]$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$.

Dresser le tableau de variation de *f* sur $[0;\pi]$

Correction :

La fonction est définie sur $[0;\pi]$, par $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$.

Elle est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout *x* de $[0;\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(-2\sin(2x)) - \sin(x) \\ &= \sin(2x) - \sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)[2\cos(x) - 1] \end{aligned}$$

Sur $[0;\pi]$, $\sin(x)$ est positif et s'annule en 0 et en π ; $f'(x)$ est donc du signe de $2\cos(x) - 1$.

Sur $[0;\pi]$, $2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ et

$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{3}$.

On en déduit le tableau de variation de *f* :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
f	2 ↗		$\frac{9}{4}$	↘	
	0				

VIII. Pour aller plus loin….Etude de la fonction tangente

Exercice 27

1. Définition

La fonction tangente, notée tan, est la fonction définie pour tout réel *x* différent de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec *k* entier, par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Valeurs particulières à connaître :

Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
tan*x*					

2. Propriétés

a. Montrer que, pour tout réel *x* différent de $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec *k* entier, $\tan(x+\pi)=\tan x$.

La fonction tangente est donc périodique de période π.

b. Montrer que, pour tout réel *x* différent de $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec *k* entier, $\tan(-\pi)=\tan x$.

La fonction tangente est donc impaire.

On peut alors réduire l'intervalle d'étude de la fonction tangente à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Etude de la fonction tangente

a. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x=+\infty$.

La droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

b. La fonction tangente est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$).

Montrer que, pour tout *x* de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

En déduire le sens de variation de la fonction tangente sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.

Correction :

1.

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	π
tan$x$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

2. a. Soit x un réel différent de $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec *k* entier,

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x.$$

b. Soit x un réel différent de $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier,

$$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

3. a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ avec $\cos x>0$, lorsque $x\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc :

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan x=+\infty$.

La droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

b.La fonction tangente est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$).

Et pour tout x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=\dfrac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

et $\tan'(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

Pour tout x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, tan'($x$) > 0. La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Courbe