Exercices Avec solutions **PROF : ATMANI NAJIB** **Tronc CS**

TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 :

1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

3) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 135°.

π	?	$\frac{3\pi}{8}$
180°	33°	?

Solution :

1) $x = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60}$ 2)

$y = \frac{3\pi}{8} \times \frac{\pi}{180} = 67,5°$

3)on a : $\frac{135}{180°} = \frac{\gamma}{\pi}$ ssi $135 \times \pi = \gamma \times 180$

Ssi $\gamma = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{27 \times \pi}{36} = \frac{3\pi}{4} rad$

Exercice2 :

1)Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des abscisses suivantes

$7\pi \quad , \frac{110\pi}{3}, \frac{19\pi}{4}, -\frac{131\pi}{3} \quad , -\frac{217\pi}{6}$

2)Placer sur le cercle trigonométrique les points

$A(0); B\left(\frac{\pi}{2}\right); C\left(\frac{\pi}{4}\right); D\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad ; E\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad ; M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

$F\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad ; G\left(-\frac{\pi}{2}\right); H\left(-\frac{\pi}{4}\right); N\left(\frac{3\pi}{2}\right); I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

Solution :

- $x = 7\pi$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d

$\alpha = 7\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

c a d $-\pi < 7\pi + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

ssi $\pi - 7\pi < 2k\pi \le \pi - 7\pi$ ssi $-8 < 2k \le -6$ ssi

$-4 < k \le -3$ et $k \in \mathbb{Z}$

alors $k = -3$ et donc

$\alpha = 7\pi + 2(-3)\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = 7\pi$ est $\alpha = \pi$

- $x = \frac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d

$\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

c a d $-\pi < \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

ssi $-\pi - \frac{110\pi}{3} < 2k\pi \le \pi - \frac{110\pi}{3}$ ssi

$-\frac{113\pi}{3} < 2k\pi \le -\frac{107\pi}{3}$ ssi $-\frac{113}{6} < k \le -\frac{107}{6}$

et $k \in \mathbb{Z}$ ssi $-18.83 < k \le -17.83$ et $k \in \mathbb{Z}$

alors $k = -18$ et donc

$\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi = \frac{110\pi}{3} + 2(-18)\pi = \frac{110\pi - 108\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = \frac{110\pi}{3}$ est $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

- $x = \frac{19\pi}{4}$

On a $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$

et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale associée a $\frac{19\pi}{4}$ est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

- $x = -\frac{131\pi}{3}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d

$\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

c a d $-\pi < -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

ssi $-\pi + \frac{131\pi}{3} < 2k\pi \le \pi + \frac{131\pi}{3}$ ssi

$\frac{128\pi}{3} < 2k\pi \le \frac{134\pi}{3}$

ssi $\frac{128}{6} < k \le \frac{134}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$ ssi

$21.33 < k \le 22.33$ et $k \in \mathbb{Z}$

alors $k=22$ et donc

$$\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi=-\frac{131\pi}{3}+2(22)\pi=\frac{-131\pi+132\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$x=-\frac{131\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{\pi}{3}$

- $x=-\frac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d

$\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

c a d $-\pi<-\frac{217\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

ssi $-\pi+\frac{217\pi}{6}<2k\pi\leq\pi+\frac{217\pi}{6}$ ssi

$\frac{211\pi}{6}<2k\pi\leq\frac{223\pi}{6}$

ssi $\frac{211}{12}<k\leq\frac{223}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$

ssi $17.58<k\leq18.58$ et $k\in\mathbb{Z}$

alors $k=18$ et donc

$$\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi=-\frac{217\pi}{6}+2(18)\pi=\frac{-217\pi+216\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$x=-\frac{217\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{6}$

2)Placer sur le cercle trigonométrique les points

$A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$;$D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; ;$M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$;$G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;$N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$;$I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

- $x=\frac{7\pi}{2}$ On a

$$\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\times2\pi$$

et $-\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=\frac{7\pi}{2}$

est $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

- $x=\frac{2007\pi}{4}$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve $501,75$ on prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times251\pi$ et $-\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=\frac{2007\pi}{4}$

est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

Methode2 : $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$

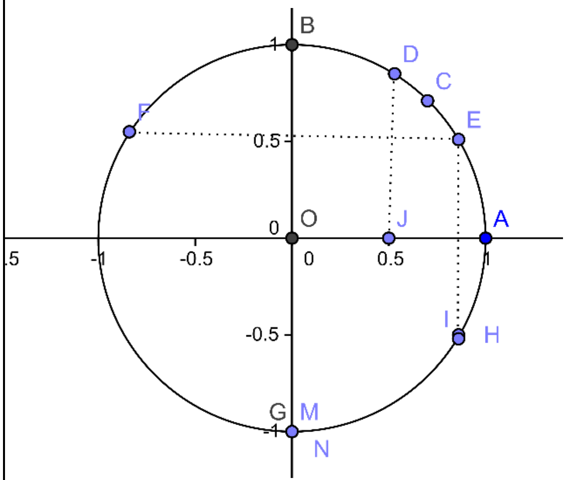
$-1<\frac{2007}{4}+2k\leq1$ ssi $-1-\frac{2007}{4}<2k\leq1-\frac{2007}{4}$

ssi $-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}$ donc

$-251,3\simeq-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}\simeq-250,3$

Donc $k=-251$ Donc

$$\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$$



Exercice3 : Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des points suivants

$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$; $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

Solution :

- $x=\frac{9\pi}{2}$

Methode1: $\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times2\pi+\frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Methode2: $-\pi < \frac{9\pi}{2} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{9}{2} + 2k \le 1$ Donc

$-1 - \frac{9}{2} < -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 2k \le 1 - \frac{9}{2}$

Donc $-\frac{11}{2} < 2k \le -\frac{7}{2}$ Donc $-\frac{11}{4} < k \le -\frac{7}{4}$

Donc $-2,7 \simeq -\frac{11}{4} < k \le -\frac{7}{4} \simeq -1,7$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -2$ Donc

$\alpha = \frac{9\pi}{2} + 2(-2)\pi = \frac{9\pi}{2} - 4\pi = \frac{9\pi - 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha = \frac{\pi}{2}$

- $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$

et $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Methode2: $-\pi < \frac{11\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{11}{3} + 2k \le 1$ Donc

$-1 - \frac{11}{3} < -\frac{11}{3} + \frac{11}{3} + 2k \le 1 - \frac{11}{3}$

Donc $-\frac{14}{3} < 2k \le -\frac{8}{3}$ Donc $-\frac{7}{3} < k \le -\frac{4}{3}$

Donc $-2,3 \simeq -\frac{7}{3} < k \le -\frac{4}{3} \simeq -1,3$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -2$ Donc

$\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

- $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a

$\frac{67\pi}{3} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2 \times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$

et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Methode2: $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{67}{4} + 2k \le 1$

Donc $-1 - \frac{67}{4} < -\frac{67}{4} + \frac{67}{4} + 2k \le 1 - \frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4} < 2k \le -\frac{63}{4}$

Donc $-8,8 \simeq -\frac{71}{8} < k \le -\frac{63}{8} \simeq -7,8$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -8$ Donc :

$\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

- $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

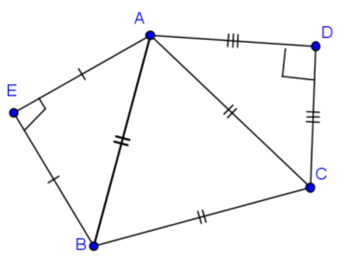
On a $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \times 3\pi + \frac{\pi}{3}$

et $\frac{\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_3 est $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Exercice4 : d'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant :

$\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CD}\right)$

Et $\left(\overrightarrow{EB} ; \overrightarrow{EA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DA}\right)$



Le triangle : ACD est rectangle et isocèle en D et Le triangle : ABC est équilatérale

- La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$ est $\frac{\pi}{3}$

Et on écrit : $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

• La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}$

Et on écrit : $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

• on a : $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)$

donc : La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$

est : $-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ cad $-\frac{7\pi}{12}$

• Le triangle : AEB est rectangle et isocèle en E

Donc : $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$

Ssi $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$ est $\frac{5\pi}{6}$

• on a : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)$ est :

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ cad $\frac{7\pi}{12}$

• La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{EA}\right)$ est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice5 :

Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivantes 7π , $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{4\pi}{3}$

Solution :

✓ $\cos(7\pi)=\cos(\pi+6\pi)=\cos(\pi+2\times3\pi)=\cos(\pi)=-1$

$\sin(7\pi)=\sin(\pi+6\pi)=\sin(\pi+2\times3\pi)=\sin(\pi)=0$

$\tan(7\pi)=\tan(0+7\pi)=\tan(0)=0$

✓ On a : $\frac{5\pi}{6}=\frac{6\pi-\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

✓ On a : $\frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

✓ On a : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

✓ On a : $\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

Exercice6 :

Calculer : $\cos\frac{10\pi}{3}$; $\sin\frac{53\pi}{6}$; $\cos\frac{34\pi}{3}$; $\cos\frac{13\pi}{6}$; $\tan\frac{37\pi}{4}$

Solution : on peut utiliser les résultats du tableau :

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\frac{33\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{33\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{37\pi}{4}=\tan\left(\frac{36\pi+\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{36\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Exercice7: montrer que : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Solution :

$1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

Et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

Exercice8: on a : $\tan x=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ donc

$1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ Donc $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ Donc

$10\cos^2 x=9$

Donc $\cos^2 x=\frac{9}{10}$ Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2}<x<\pi$: donc $\cos x\leq 0$ Donc :

$\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) on a : : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc

$\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice9: on a : $\sin x=-\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$

Donc $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$ donc : $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$

Or on a $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x\geq 0$

Par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

On a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$

Exercice10:1) sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

2) sachant que : $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ et $\tan x=2\sqrt{3}$

Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

3) sachant que : $\cos x>\sin x>0$ et $\cos x\cdot\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Calculer : $\cos x+\sin x$ et $\cos x-\sin x$

Et en déduire $\cos x$ et $\sin x$

Solution :

• on a $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ donc $\cos^2 x=1-\frac{2}{9}$

donc : $\cos^2 x=\frac{7}{9}$ donc : $\cos x=\sqrt{\frac{7}{9}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{7}{9}}$

or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc : $\cos x<0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\tan x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$

2)on a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan x=2\sqrt{3}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+12}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{13}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{13}}{13}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

or $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ donc $\cos x<0$

donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

on a : $\tan x\cdot\cos x=\sin x$ donc : $\sin x=2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

donc : $\sin x=-\frac{2\sqrt{39}}{13}$

3)on a : $\cos x>\sin x>0$ et $\cos x\cdot\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Et on a : $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x$

Ssi $(\cos x+\sin x)^2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Ssi $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ (1) car $\cos x+\sin x>0$

Et on a : $(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

Donc : $(\cos x-\sin x)^2=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

Donc : $\cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ (2) car $\cos x-\sin x>0$

$(1)+(2)$ donne : $\cos x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$(1)-(2)$ donne : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice11: simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Solution : on a : donc

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$

Donc : $C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$

$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$

$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

On a $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

Et on a $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

Et on a $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

Donc :

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

Donc :

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

On a $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

Donc :

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

Donc :

$H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Et on a $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

Donc

$H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

Exercice12: simplifier les expressions suivantes :

1) $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

2) $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

3) $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

Solution :1) $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

On remarque que : $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$

Donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$ donc :

$$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$$

2) $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

On remarque que : $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ Et $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$

Donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

Donc : $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

$$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

Et on remarque aussi que : $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc : $B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

3) $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

on remarque que : $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$

$\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

Et $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

Donc on a :

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Et on remarque aussi que : $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$

Donc $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

On a donc :

$$C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien