

Professeur : Rachid BELEMOU

COURS

Niveau : TCT - BIOF

Lycée : Oued Eddahab

Equations , inéquations et systèmes

Année : 2017-2018

I. Equations du premier degré à une inconnue :

Activité : (révision) résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{x}{3} ; \quad x - \frac{3x+4}{2} = \frac{2}{3} ; \quad \frac{3x+1}{2} - \frac{3-x}{3} = 1$$

II. Equations du second degré dans \mathbb{R} :

1) Equation produit nul ou du type $x^2=a$:

Activité : (révision):

résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 4 = 0 ; \quad x^2 - 2x = 0 ; \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

2) Equation du second degré :

Définition : une équation du second degré à une inconnue x (nombre réel) est une équation de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de x pour les quelles $ax^2 + bx + c = 0$.

Activité1 : On considère le trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$

avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

montrer que :
$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Définitions : l'expression $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée la forme canonique du trinôme

de second degré $ax^2 + bx + c$.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ou du trinôme $ax^2 + bx + c$ on le note Δ (lire "delta").

Activité2 : (le cas général)

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ en utilisant la forme canonique

Conclusion : Trois cas se présentent :

Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions (ou racines) $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution (ou racine) $x = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.

Exemple : on considère l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$

on a $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$ donc le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 \text{ d'où l'équation a deux solutions :}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Application : résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$x^2 + x + 1 = 0 ; \quad -6x^2 + x + 1 = 0 ; \quad x^2 - 7x = -12 ; \quad 3x^2 - x - 4 = 0$$

Remarque : il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant, c'est le cas des équations suivantes : $x^2 - 4 = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$

Professeur : Rachid BELEMOU	COURS	Niveau : TCT - BIOF
Lycée : Oued Eddahab	Equations , inéquations et systèmes	Année : 2017-2018

3) La somme et le produit des racines d'une équation du second degré :

Activité : on considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$
 supposons que cette équation admet deux solutions x_1 et x_2
 écrire $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$ en fonction de a , b et c

Conclusion : si une équation du second degré admet deux solutions x_1 et x_2 alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque : il est utile de retenir que si on connaît a priori une racine alors on peut obtenir à l'aide de ces formules la valeur de la deuxième.

Théorème : si a et c n'ont pas le même signe alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes ; la réciproque n'est pas toujours vraie .

Application : on considère l'équation : $x^2 + 2x - 3 = 0$
 sans calculer Δ ,

- 1) montrer que cette équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .
- 2) calculer $x_1 \times x_2$ et déterminer une racine évidente puis déduire la deuxième racine.

4) Factorisation d'un Trinôme du second degré :

Activité : on considère le trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
 en utilisant la forme canonique, factoriser $P(x)$

Conclusion : Trois cas se présentent :

- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les deux racines de $P(x)$
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)^2$ avec x_1 est la seule racine de $P(x)$
- Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser $P(x)$

5) Le signe d'un Trinôme du second degré :

Activité : on considère le trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
 déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de .

6) Les inéquations du second degré :

Activité : résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :
 $x^2 - 3x + 2 < 0$; $-6x^3 + x^2 + x \geq 0$

III. Les systèmes d'équations :

1) Equations du premier degré à deux inconnues :

Activité1 : résoudre dans \mathbb{R}^2 l'équation $2x + y = 1$

Conclusion : - résoudre une équation du premier degré à deux inconnues c'est déterminer tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient cette équation.

- Cette équation a donc une infinité de solutions donc impossible d'écrire l'ensemble de ses solutions en extension, on peut l'écrire seulement en compréhension :

$$S = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1 - 2x\}$$

- graphiquement l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des couples des coordonnées des points de la droite d'équation $2x + y = 1$

Professeur : Rachid BELEMOU	COURS	Niveau : TCT - BIOF
Lycée : Oued Eddahab	Equations , inéquations et systèmes	Année : 2017-2018

2) Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues :

Activité1 : résoudre dans \mathbb{R}^2 par la méthode de substitution les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ -5x + y = 7 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Activité2 : résoudre par la méthode des combinaisons linéaires les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases} ; \begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

Activité3 : résoudre par la méthode des combinaisons linéaires le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Conclusion :

- résoudre un système de deux équations à deux inconnues c'est déterminer tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Méthode de Kramer

Le nombre réel $ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système et on le note Δ ($\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$)

Deux cas se présentent

Si $\Delta \neq 0$ alors $(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta})$ est la seule solution du système avec :

$$\Delta_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Si $\Delta = 0$ alors $0 = \Delta_y$ et $0 = \Delta_x$

donc deux sous cas $S = \emptyset$ ou les deux équations sont équivalentes il suffit de résoudre une des deux.

Application: résoudre dans \mathbb{R}^2 par la méthode des déterminants les deux systèmes :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$$

3) Régionnement du plan :