Exercices d'application Avec solutions **PROF : ATMANI NAJIB** **Tronc CS**

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$ 3) $(x+2)^2=9$

4) $5x^2-4x=0$ 5) $3x^2-x-2=0$

Solution :1)L'équation $x^2=16$.
16 est positif donc l'équation admet deux solutions
$x=\sqrt{16}=4$ et $x=-\sqrt{16}=-4$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-4;4\}$

2)L'équation $x^2=-8$.
-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution
Dans $\mathbb{R}$. Donc : $S=\varnothing$

3)L'équation $(x+2)^2=9$.

On a alors $x+2=3$ ou $x+2=-3$.
L'équation admet deux solutions $x=3-2=1$ et $x=-3-2=-5$.Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ ssi $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

Soit : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$ Donc l'ensemble de toutes l
es solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$

On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2-x-2$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ ssi $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et . $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

Exercice2 : déterminer la forme canonique du trinôme $3x^2-x-2$

Solution : Calculons le discriminant :
a = 3, b = -1 et c = -2 donc :
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times(-2)==1+24=25$
la forme canonique est:

$$3x^2-x-2=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times3}=\frac{1}{6}\quad \text{et}\quad \beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{25}{4\times3^2}=-\frac{25}{36}$$

$3x^2-x-2=3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$ la forme canonique :

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$

c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

Solution :a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$:a = 2, b = -1 et c = -6
donc $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-6)=49$.
Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes

: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2}=-\frac{3}{2}$

et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2}=2$

$S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$ et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme

factorisée : $2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

c a d $2x^2-x-6=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$

: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

donc Δ = $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$ c a d : $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$ a une forme factorisée :

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$
:a = 1, b = 3 et c = 10
donc Δ = $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$$x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

$$R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ **2)** $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
3) $3x^2 + x + 2 = 0$ **4)** $4x^2 - 8x + 3 = 0$
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ 6) $x^2 + 5x + 7 = 0$
7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ **8)** $x^2 - 4x - 21 = 0$
9) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

Solution : 1) $a = 6$ **et** $b = -7$ **et** $c = -5$

$6x^2 - 7x - 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Donc : $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

2) $a = 2$ **;** $b = -2\sqrt{2}$ **;** $c = 1$ $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$$

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **donc :** $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 84 - 8 = 16 = (4)^2 > 0$$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times 4} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times 4}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times 1} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times 1}$$

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = 2+\sqrt{2} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} = 2-\sqrt{2}$$

Donc **:** $S = \left\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right\}$

6) $x^2 + 5x + 7 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

8) $x^2 - 4x - 21 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times 1} \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times 1}$$

$$x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \textbf{et} \quad x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Donc : $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ $S=\{1\}$

Exercice5 : Factoriser les trinômes :

a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

Solution :a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4}=\frac{1}{4}$

On a donc :

$4x^2+19x-5=4(x-(-5))\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme Δ = 0, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times9}=\frac{1}{3}$:

et le trinôme $9x^2-6x+1$ a une forme factorisée :

$9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

$$\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$$

Solution :- On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$:

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times2}=2$

On a donc : $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est :

$\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

On a donc :

$2x^2+13x+6=2(x+6)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-6\,;-\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$ c à d

$\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)}=0$

c à d $x+6-x^2=0$ car $x\neq-\frac{1}{2}$ et $x\neq-6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est :

$\Delta'' = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$.

Les racines sont : $x_1''=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=3$ et $x_2''=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=-2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3.

Donc $S=\{-2;3\}$

Exercice7 : soit le trinôme $2019x^2-2020x+1$

a) vérifier que 1 est racine du trinôme

b) trouver l'autre racine du trinôme

Solution :

a) $2019\times1^2-2020\times1+1=2019-2020+1=2020-2020=0$

donc $x_1=1$

b) a = 2019, b = -2020 et c = 1

on a : $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ donc $1\times x_2=\frac{1}{2019}$ donc $x_2=\frac{1}{2019}$

Exercice8 : soit le trinôme (T): $-2x^2+\sqrt{2}x+2$

1) prouver que le trinôme (T) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) : $a=-2$ **et** **et** $b=\sqrt{2}$ **et** $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (T): a deux racines distinctes : α et β

2) on a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc

$\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$ donc $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

On a : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ donc $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ donc

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ donc

$\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

donc

$\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$

Solution : méthode1 :

$\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=5-y \\ (5-y)\times y=4 \end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$ ssi

$y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4

donc Δ = b² – 4ac = (-5)² – 4 x 1 x 4 = 9.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times1}=1$ et $y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times1}=4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Exercice10 : Résoudre l'équations suivantes :

$x^2-22x-23=0$ (utiliser le discriminant réduit)

Solution : on a : b = -22 et 22 est pair b = -2 x 11

donc b' = - 11

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation :

$\Delta'=b'^2-ac=(-11)^2-1\times(-23)=121+23=144$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)-\sqrt{144}}{1}=\frac{11-12}{1}=-1$ et

$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)+\sqrt{144}}{1}=\frac{11+12}{1}=23$

$S=\{-1;23\}$

Exercice11 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-3x+1\geq0$ b) $-2x^2+4x-2\geq0$ c) $3x^2+6x+5<0$

Solution : a) $2x^2-3x+1\geq0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

b) $-2x^2+4x-2\succ0$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=-2x^2+4x-2$

$a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

Comme Δ = 0, le trinôme possède une racine double:

$x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $S=\varnothing$

c) $3x^2+6x+5>0$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$

$a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2+6x+5$		$+$	

Donc : $S=\mathbb{R}$

Exercice12 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x^2+6x-9>0$ b) $x^2+3x-5<-x+2$

c) $\frac{1}{x^2-x-6}\geq2$

Solution : a) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$.

Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est Δ = 6² – 4 x 3 x (-9) = 36 + 108 = 144.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont :

$x_1=\dfrac{-6-\sqrt{144}}{2\times 3}=\dfrac{-6-12}{6}=-3$ et

$x_2=\dfrac{-6+\sqrt{144}}{2\times 3}=\dfrac{-6+12}{6}=1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $]-\infty\,;-3[$ et $]1\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc $S=]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$.

b) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

Etudier le Signe d'un trinôme

a) $x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

Et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{44}}{2\times 1}=-2+\sqrt{11}$ $x_1=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $S=\left]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right[$.

c) $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

- On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :

*Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-2$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{25}}{2\times 1}=3$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;3\}$.

$\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ Équivaut à $\dfrac{1}{x^2-x-6}-2\geq 0$

Soit : $\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2'=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ est : $S=\left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

Exercice13 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-4x+6\geq 0$ b) $4x^2-8x+3\leq 0$

c) $x^2-3x-10<0$

Solution : a) $2x^2-4x+6\geq 0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

Donc : $S=\mathbb{R}$

b) $4x^2-8x+3\leq 0$ $a=4$ Étudions le signe du trinôme

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times 4\times 3=64-48=16>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{8+4}{2\times 4}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{8-4}{8}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$3x^2-4x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$

c) $x^2-3x-10<0$ $\Delta=b^2-4ac=49>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=5$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=]-2,5[$

Exercice14 : Résoudre les équations et les inéquations suivantes : 1) $(x-1)^2=9$ 2) $(x-1)^2\leq 9$ 3) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$

4) $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$

Solution :1)Résoudre $(x-1)^2=9$ ssi: $x-1=3$

ou $x-1=-3$ soit $x=4$ ou $x=-2$, d'où $S=\{-2\ ;\ 4\}$.

2) Pour résoudre une inéquation comportant des carrés, on peut transposer tous les termes dans un seul membre et on factorise, si possible, en un produit de facteurs du premier degré.

On peut alors en déduire l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Résoudre $(x-1)^2\leq 9$ revient à écrire $(x-1)^2-9\leq 0$

.D'où : $(x-1-3)(x-1+3)\leq 0$: , ou

encore : $(x-4)(x+2)\leq 0$.

x	-¥		-2		4		+¥
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif sur l'intervalle [- 2 ; 4],

d'où : S = [- 2 ; 4].

3) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$

Pour $x\neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$ équivaut à

résoudre : $3(x-1)=2x$.

D'où : $3x-3=2x$, ou encore $3x-2x=3$, soit $x=3$.

L'ensemble des solutions est $S=\{3\}$.

• Dans le cas de l'inéquation $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$ on transpose tous les termes dans un seul membre et on fait apparaître si possible un quotient de facteurs du premier degré. On peut alors déterminer l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes. Pour $x\neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$ équivaut

à résoudre $\frac{x-1}{x}-\frac{2}{3}\leq 0$ .En réduisant au même

dénominateur, on obtient : $\frac{3x-3}{3x}-\frac{2x}{3x}\leq 0$, soit

x	-¥		0		3		+¥
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{3x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

.

Le quotient est négatif sur l'intervalle]0 ; 3]

donc $S=]0,3]$

Exercice15 : soit le polynôme suivant (E) :

$P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1)Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2)Montrer que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

3)On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4)en déduire les solutions de

l'équation $x\ -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1)Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$ Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$

3) a) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$ On a $\Delta\succ 0$

$x_2=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ et $x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

donc : $S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

4)recherche des solutions de

l'équation $x\ -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s'écrire sous la forme :

$\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$ On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=1$

donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ **et** $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

donc : $x_1=2$ et $x_2=1$ On a donc : $S=\{2,1\}$

5) recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ ssi $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

ssi $x=-1$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=1$

On a donc : $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

$P(x)\leq 0$ ssi $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq 0$

x	$-\infty$	-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$

Exercice16 : soit l'équation (E) :

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ et soit Δ son discriminant

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

5)en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Solution : (E) : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E):

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$$

et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et

$x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

x		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$ $-\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$	$+$	0	$-$	0	$+$

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

5)en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ peut s'écrire sous la forme :

$\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc :

$X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont :

$X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ or

l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solutions

donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$ On a donc : $S=\{2\}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien