أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجذع مشترك أدبي
الدرس الرابع :
الحساب العددي4:
المعادلات والمتراجحات و النظمات

الأستاذ: نجيب عثماني

محتوى الدرس

المعادلات ، المتراجحات ، النظمات

- المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد ، تعميل ثلاثية الحدود
- إشارة ، المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين
- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

طرق الحل: التعويض ، التأليفة الخطية والمحددات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية بمجهول واحد، ومعادلات تؤول في حلها إلى المعادلات السابقة.
- تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية باستعمال مختلف التقنيات.
- حل متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد، ومتراجحات تؤول في حلها إلى المتراجحات السابقة.
- حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.
- ترييض وضعيات تؤول في حلها إلى المعادلات أو المتراجحات أو النظمات السابقة .

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.
كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$

7) $x^3-x=0$

الجواب: 1) $-2x+22=0$ **يعني** $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ **يعني** $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ **يعني** $0x=-16$ **يعني** $0=-16$

وهذا غير ممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ **يعني** $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ **يعني** $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ **يعني** $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ **يعني** $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ **يعني** $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ **يعني** $9x^2=16$ **يعني** $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو, $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ **يعني** $x=\frac{4}{3}$ أو, $x=-\frac{4}{3}$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

يعني $x-\frac{1}{2}=0$ أو $9x-3=0$ أو $2x+3=0$

يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{3}$ أو $x=-\frac{1}{3}$

منه: $S=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{4x+4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{15x-6}{6}+\frac{2}{6}$

يعني $\frac{4x+4-3}{6}=\frac{15x-6+2}{6}$

يعني $\frac{4x+1}{6}=\frac{15x-4}{6}$ يعني $4x+1=15x-4$

يعني $-11x=-5$ يعني $x=\frac{5}{11}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{11}\right\}$

7) $x^3-x=0$ يعني $x\left(x^2-1\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-1=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=1$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{1}$ أو $x=-\sqrt{1}$ ومنه: $S=\{-1,0,1\}$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-4x=0$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$

الجواب: (1 $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ يعني $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-4x=0$ يعني $x\left(x^2-4\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-4=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=4$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{4}$ أو $x=-\sqrt{4}$ ومنه: $S=\{-2,0,2\}$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$ يعني $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

II. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. تعاريف:

تعريف1: المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول و a و b و c أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد -1 حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

لأن: $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة : كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$

تعريف2: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال: نعتبر المعادلة $(E):3x^2-5x+7=0$

لنحسب مميز المعادلة (E)

لدينا: $a=3$ و $b=-5$ و $c=7$ بما أن: $\Delta=b^2-4ac$

فان: $\Delta=(-5)^2-4\times7\times3=25-84=-59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

2. خاصية:

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

✓ **إذا كان** $\Delta\prec 0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ **إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ **إذا كان** $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta\prec 0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد مزدوج

لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $x=\frac{-b}{2a}=5$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ $\Delta\succ 0$ (2 $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $\Delta=0$

3) $3x^2+x+2=0$ $\Delta\prec 0$ (4 $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ (6 $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ (8 $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

الأجوبة: $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وحيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

بما أن $\Delta\prec 0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

4) $4x^2-8x+3=0$ و $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ و $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$ و $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$

6) $x^2+5x+7=0$ و $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$ و $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$ و $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ و $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه: $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ و $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

3. تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta\succ0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2.
و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
2. إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
3. إذا كان: $\Delta\prec0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

أمثلة : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة 1 : $x^2-10x+25$: $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:**

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل : $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 و $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=1$

ومنه التعميل :

$$x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 3: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $2x^2-4x+6$ 2) $4x^2-8x+3$ 3) $3x^2-6x+3$

أجوبة : 1) $2x^2-4x+6=0$: $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(6)=16-48=-32<0$$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

2) $4x^2-8x+3=0$ و $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه التعميل : $4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

3) $3x^2-6x+3$ بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(-8)}{2\times4}=1$

ومنه التعميل : $3x^2-6x+3=a(x-x_1)^2=3(x-1)^2$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

إشارة الحدانية: $ax+b$ $a\neq0$

ملخص:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

$2x+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$

$-x+2=0$ يكافئ $x=2$

و بما أن: $a=-1$ و $a\prec 0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$-$	0	$+$

مثال 3: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x+6\geq 0$

$3x+6=0$ يكافئ $x=-2$

و بما أن: $3x+6\geq 0$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=[-2;+\infty[$

مثال 4: حدد إشارة: $-3x+9$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-3x+9\prec 0$

تمرين 4: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$

أجوبة: 1) $-2x+12>0$ $-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq 0$ $5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=]-\infty;3]$

IV. متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

1) حل متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

مثال 1: أو تمرين 5: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $4x^2-9\geq 0$ 2) $(1-x)(2x+4)>0$

أجوبة: 1) $4x^2-9\geq 0$

$4x^2-9=0$ **يعني** $(2x)^2-3^2=0$ **يعني** $(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ **يعني** $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ **يعني** $2x+4=0$ أو $1-x=0$ **يعني**

$x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(1-x)(2x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-2;1[$

تمرين 6: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9x^2-25\prec 0$

2) إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c وحل متراجحات من الدرجة الثانية:

الحالة1: إذا كان $\Delta\succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$	اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a

الحالة2: إذا كان $\Delta=0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$	اشارة a	0	اشارة a

الحالة3: إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a فان:

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$	اشارة a

مثال1:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq 0$

أجوبة: 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

مثال2:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة: 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

2)حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

مثال3:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة: 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

ومنه: $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

2)**حل** المتراجحة : $S=\varnothing$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ **المتراجحات التالية :**

1) $2x^2-4x+6\geq0$ (2) $4x^2-8x+3\leq0$ (3) $x^2-3x-10<0$

أجوبة: 1) $2x^2-4x+6\geq0$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $4x^2-8x+3\leq0$ $a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $x^2-3x-10<0$ $a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ و $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

V. النظمات:

1. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

مثال و أنشطة:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1) تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$

2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة: 1) $2\times0+3\times\frac{2}{3}=2$ اذن : $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

2) $x=2$ اذن : $2\times2+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{2}{3}$ اذن : $\left(2,-\frac{2}{3}\right)\in S$

$x=3$ اذن : $2\times3+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{4}{3}$ اذن : $\left(3,-\frac{4}{3}\right)\in S$

$x=4$ اذن : $2\times4+3\times y=2$ يعني : $y=-2$ اذن : $(4,-2)\in S$

3) $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{-2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 8: حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-8y+10=0$ (2) $-3x+12y-2=0$

3) $7x-14y+1=0$

أجوبة: 1) $2x-8y+10=0$ يعني $2y=8x-10$ يعني $y=\frac{8x-10}{2}$

يعني $y=4x-5$ اذن : $S=\{(x;4x-5)/x\in\mathbb{R}\}$

2) $-3x+12y-2=0$ يعني $12y=3x+2$ يعني $y=\frac{3x+2}{12}$

يعني $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $7x-14y+1=0$ يعني $7x=14y-1$ يعني $x=\frac{14y-1}{7}$

يعني $x=2y-\frac{1}{7}$ اذن : $S=\left\{\left(2y-\frac{1}{7};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

2. نظمة معادلتين:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c' أعداد حقيقية.

هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

a. طريقة التعويض :

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :

نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

b. طريقة التأليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :

نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

c. طريقة المحددة :

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

- إذا كان $\Delta=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.
- إذا كان $\Delta\neq0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \text{ و } y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}.$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+4y=2 \end{cases}$

الجواب : محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا: هو $x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و منه: $S=\{(2,1)\}$

تمرين 9: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

1) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -7x-3y=4 \\ 4x+5y=-2 \end{cases}$

أجوبة :

1) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$2x-y=-1$ يعني $y=2x+1$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$3x+2(2x+1)=9$ يعني $-5x+2y=-19$

يعني $7x+2=9$ يعني $7x=7$ يعني $x=1$

ونعوض x ب 1 في المعادلة $y=2x+1$ فنجد $y=3$

و منه: $S=\{(1,3)\}$

2) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$

نضرب المعادلة الأولى في العدد (2) فنحصل على :

$\begin{cases} 2x-4y=-8 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$2x-4y-2x+3y=-8+5$ يعني $-y=-3$ يعني $y=3$

ونعوض y ب 3 في المعادلة $x-2y=-4$ فنجد $x=2$

و منه: $S=\{(2,3)\}$

3) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-35+12=-23\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{14}{23}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{23}$ و منه: $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},-\frac{2}{23}\right)\right\}$

تمارين للبحث

تمرين 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $2x^2-4x+6=0$ 2) $4x^2-8x+3=0$

3) $3x^2-6x+3=0$ 4) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

تمرين 2 : 1) حل جبريا النظمة التالية : $\begin{cases} x+y=14 \\ 5x+3y=50 \end{cases}$.

2) ملأ شخص أربع عشرة قنينة بخمس لترات من عصير فواكه . إذا علمت أن القنينات نوعان : قنينات سعة كـل واحدة منها 0,5 لترا و قنينات سعة كـل واحدة منها 0,3 لترا، حدد عدد القنينات من كـل نوع .

تمرين 3 :

1) حـل المعادلة : $(2x-3)(4-3x)=0$.

2) حـل المتراجحة : $5x-2<2(x+5)$.

3) اشترى شخص محسبة و كتابا بثمن 153 درهما. إذا علمت أن نصف ثمن المحسبة ينقص بثمانية عشر درهما عن ثلثي ثمن الكتاب، أحسب ثمن المحسبة .

تمرين 4 :

1) حـل النظمة : $\begin{cases} x+y=20 \\ 2x+5y=61 \end{cases}$.

2) يتوفر أحمد على 61 درهما موزعة على 20 قطعة نقدية بعضها من فئة درهمين ، والبعض الآخر من فئة خمسة دراهم. أحسب عدد القطع النقدية من كـل فئة

تمرين 5 :

1) أ) حـل المعادلة التالية : $\frac{2x}{3}-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{2}$.

ب) حـل المتراجحة التالية : $2-3x>x+7$.

2) أ) حـل النظمة : $\begin{cases} 3x+5y=72 \\ x+y=20 \end{cases}$.

ب) واجب زيارة أحد المتاحف هو 3 دراهم للأطفال و 5 دراهم للكبار. أدى فوج من 20 زائر مبلغ 72 درهما لزيارة هذا المتحف. حدد عدد الأطفال و عدد الكبار في هذا الفوج .

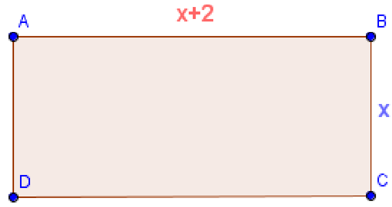
1) $\begin{cases} 2x-5y=-13 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

ترييض وضعيات :

نشاط

أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$ وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x+2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$x^2+2x-15=0$: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$$\Delta = b^2-4ac = (2)^2-4\times1\times(-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-2+8}{2\times1} = 3$ و $x_2 = \dfrac{-2-8}{2\times1} = -5 < 0$

ومنه:بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x = 3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$