

ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

• $[a, +\infty[$ يقرأ "المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$

المتفاوتة	المجال	المتفاوتة	المجال
$x > b$	$]b, +\infty[$	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$x \geq b$	$[b, +\infty[$	$a < x \leq b$	$]a, b]$
$x \leq a$	$]-\infty, a]$	$a \leq x < b$	$[a, b[$
$x < a$	$]-\infty, a[$	$a < x < b$	$]a, b[$

V. **تأطير عدد حقيقي: تعريف:** ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a < b$ بحيث:

$a \leq x \leq b$ أو $a < x < b$ أو $a < x \leq b$ أو $a \leq x < b$.

العدد الحقيقي الموجب قطاعا $b - a$ يسمى سعة التأطير

و العددين a و b هما محددات التأطير.

مثال: لتكن $1 \leq x \leq 2$ و $7 \leq y \leq 8$

أعط تأطيرا لكل من $x - y$, $-y$, $x + y$, x^2 , y^2 , $2x$,

$$\frac{x}{y}, 2x - 3y$$

الجواب: $1 \leq x \leq 2$ و $7 \leq y \leq 8$ إذن: $7 + 1 \leq x + y \leq 8 + 2$

$$8 \leq x + y \leq 10$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ إذن: } -8 \leq -y \leq -7$$

$$x - y = x + (-y)$$

لدينا: $1 \leq x \leq 2$ و $-8 \leq -y \leq -7$ إذن: $-7 \leq x - y \leq -5$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ يعني } 1^2 \leq x^2 \leq 2^2 \text{ يعني } 1 \leq x^2 \leq 4$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } 7^2 \leq y^2 \leq 8^2 \text{ يعني } 49 \leq y^2 \leq 64$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ يعني } 1 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 2 \text{ يعني } 2 \leq 2x \leq 4$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } 3 \times 7 \leq 3 \times y \leq 3 \times 8 \text{ يعني } 21 \leq 3y \leq 24$$

$$2x - 3y = 2x + (-3y)$$

$$-24 \leq -3y \leq -23 \text{ و } 2 \leq 2x \leq 4$$

$$\text{إذن: } 2 - 24 \leq 2x - 3y \leq 4 - 23$$

$$\text{يعني: } -22 \leq 2x - 3y \leq -19$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } \frac{1}{8} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ إذن: } 1 \times \frac{1}{8} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 2 \times \frac{1}{7} \text{ إذن: } \frac{1}{8} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{7}$$

I. **تعريف:** ليكن a و b عددين حقيقيين.

(1) نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \leq b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

(2) نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \geq b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$

(3) نقول إن a أصغر قطاعا من b و نكتب $a < b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$

(4) نقول إن a أكبر قطاعا من b و نكتب $a > b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

إذن: لمقارنة عددين حقيقيين نحسب الفرق وندرس اشارته

مثال: $a \in \mathbb{R}$ قارن: $2a$ و $a^2 + 1$

$$\text{الجواب: } (a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن $a \in \mathbb{R}$

II. **خاصيات:** لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية 1: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$

ملحوظة: إذا كان $a \leq b$ و $b < c$ فإن $a < c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة a و b مع نفس العدد b .

خاصية الترتيب و الجمع:

$$a \leq b \text{ يكافئ } a + c \leq b + c$$

■ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$

■ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فإن $a + b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

■ إذا كان $c > 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$

■ إذا كان $c < 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$

■ إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فإن $0 \leq ac \leq bd$

■ إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فإن $a + b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب: a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس

$$\text{إشارة } (ab > 0) \text{ يكافئ } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \text{ يكافئ } a \leq b$$

إذا كان $a \leq b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عدنان حقيقيان موجبان.

$$a \leq b \text{ يكافئ } a^2 \leq b^2 \text{ و } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

و لكل $a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

مثال: قارن العددين: $a = \sqrt{6}$ و $b = 2\sqrt{3}$

$$\text{لدينا: } (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 4 \times 3 = 12 \text{ و } (\sqrt{6})^2 = 6 \text{ ومنه } a < b$$

ومنه $a < b$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز \leq بأحد

الر موز: \geq أو $<$ أو $>$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

(1) إذا كان $x \geq 0$ فإن: $|x| = x$ و إذا كان $x \leq 0$ فإن: $|x| = -x$

$$\text{مثال: } |3| = 3 \text{ و } |-3| = -(-3) = 3 \text{ و } |1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

IV. **المجالات:** ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$.

ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات:

مصطلحات: الرمز $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

• $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.

• $[a, b]$ يقرأ: "المجال المغلق a, b " أو "القطعة a, b "

• $]a, b[$ يقرأ "المجال المفتوح a, b "