السقوط الرأسي لجسم صلب

I ـ مجال الثقالة

تعريف

كل جسم موجود على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها يخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب $\vec{P}$. هذه القوة هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب $\vec{g}$

العلاقة بين $\vec{P}$ و $\vec{g}$ هي : $\vec{g}=\frac{1}{m}\vec{P}$ حيث m كتلة الجسم .

مميزات متجهة مجال الثقالة :

ـ الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .

ـ المنحى : نحو الأرض

ـ المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة N/kg^{-1}

ملحوظة : تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

II ـ القوى المطبقة من طرف مائع .

1ـ قوى الاحتكاك المائع

كل جسم في حركة داخل مائع

تكافئ هده القوى المطبقة من طرف المائع على الجسم المتحرك ، قوة وحيدة تسمى قوة المائع

مميزات قوة الاحتكاك المائع :

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور G للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز فصور الجسم

الشدة :

المتحرك بالنسبة للمائع .

ننمذج شدتها بالعلاقة التالية : $f=k.v_G^n$ حيث k ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع $v_G=v$ ، فتسبح العلاقة $f=k.v^n$.

ملحوظة : عندما تكون قيمة السرعة صغيرة ، نأخذ n=1 ، فتصبح العلاقة السابقة كالأتي : $f=k.v$ ، في هذه الحالة تتعلق k بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة v كبيرة ، نأخذ n=2 تصبح العلاقة السابقة $f=k.v^2$ في هذه الحالة ، لاتتعلق k بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

2 ـ دافعة أرخميدس

يخضع كل جسم مغمور كليا أو جزئيا في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ، يسمي مجموع هذه القوى بدافعة أرخميدس .

مميزاتها هي :

ـ نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

ـ الاتجاه : الخط الرأسي

ـ المنحى : نحو الأعلى

ـ الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع : $\vec{F}_A=-\rho_f.V.\vec{g}$

بحيث أن ρ_f الكتلة الحجمية للمائع ب kg/m^3

V الحجم المزاح للمائع (m^3)

g : شدة مجال الثقالة (N/kg) أو m/s^2

F_A شدة دافعة أرخميدس (N)

ملحوظة : $\vec{F}_A=-\vec{P}_f$ ، $\vec{P}_f$ هي وزن الحجم المزاح .

نبين أن $\frac{\vec{F}_A}{\vec{P}_s}=\frac{\rho_f}{\rho_s}$ حيث P_s هو وزن الجسم الصلب المغمور في المائع و ρ_s كتلته الحجمية .

أذا كانت ρ_f أصغر بكثير من ρ_s فأن F_A تصغر بكثير من P_s هذه الحالة نجدها عندما يكون المائع غلزيا .

III ـ السقوط الرأسي باحتكاك

النشاط التجريبي

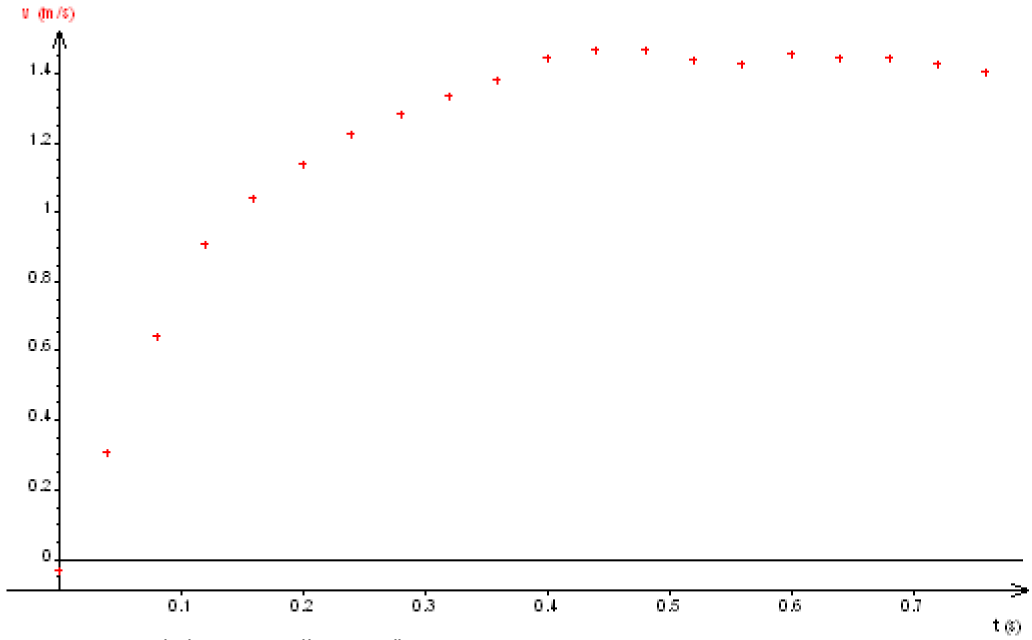
الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقة أولير

العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة 1ℓ . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية $\rho_f=1,07g/m\ell$ ، كرية فولاذية كتلتها $m_b=6,88g$ وشعاعها R=5,9mm نسجل حركة الكرية في

السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع

نستعمل برنم أفيميكا Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال سقوطها مع اختيار محور رأسي موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج (t,y) .

نرسل جدول القياس إلى برنم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة السرعة $\vec{v}_G$ وهي $v=\frac{dy}{dt}$ ، يقوم البرنم بحساب قيم v ثم رسم منحنى تغيرات v بدلالة الزمن t على الشاشة ، ثم نحفظ الملف .



منحنى تغير سرعة مركز قصور الكرية خلال سقوطها في سائل الغليسيرول مخفف

استثمار

1 ـ استغلال المنحنى v=f(t)

أ ـ يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة الكرية في كل نظام .

ب ـ هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع $\vec{a}_G$ مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .

ج ـ مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .

يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية v_ℓ . حدد قيمة v_ℓ .

د ــ مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل O . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها τ نسميه الزمن المميز . عين قيمة τ .

ه ــ ما قيمة a_0 لإحداثية $\vec{a}_0$ على المحور الرأسي عند اللحظة t=0 ؟

2 ــ الدراسة النظرية

أ ــ أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة G مركز قصور الكرية .

ب ــ أثنا سقوط الكرية ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرية . حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .

ج ــ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرية أثناء سقوطها الرأسي في المائع في مرجع تحدده ، أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرية وm كتلة الكرية ومتجهة التسارع لمركز قصور الجسم $\vec{a}_G$.

د ــ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $(O,\vec{k})$ الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :

$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$ (1) . عبر عن A و B بدلالة m و k و F_A و g شدة الثقالة .

ه ــ بين أن سرعة G تبلغ قيمة حدية v_ℓ ، واعط تعبير v_ℓ بدلالة A و B و n .

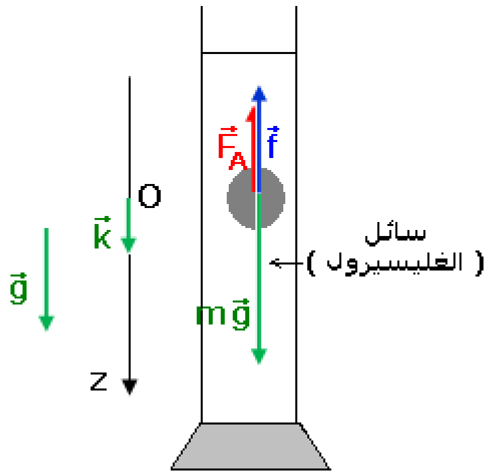
و ــ أثبت أن العلاقة (1) تكتب على النحو التالي : $\frac{dv}{dt} = A\left(1-\left(\frac{v}{v_\ell}\right)^n\right)$ (2)

ز ــ أوجد التعبير الحرفي للإحداثية a لمتجهة التسارع $\vec{a}_G$ على المحور $(O,\vec{k})$ في اللحظة t=0

<u>1 ــ المعادلة التفاضلية للحركة</u>

دراسة حركة كرية كتلتها m و حجمها V وكتلتها الحجمية ρ_{bille} في مائع كتلته الحجمية ρ_{fluide} في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .

بما أم حركة الكرية رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد و ممنظم موجه نحو الأسفل $(O,\vec{k})$.



ــ المجموعة المدروسة : الكرية

ــ جرد القوى المطبقة الخارجية حلال سقوطها :

$\vec{P}$: وزن الكرية ، $\vec{P} = m.\vec{g}$

$\vec{F}_A$: دافعة أرخميدس : $\vec{F}_A = -m_f.\vec{g} = -\rho_f.V.\vec{g}$

$\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع : $\vec{f} = -k.v^n.\vec{k}$

ــ نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m_{bille}.\vec{a}_G$ حيث أن $\vec{a}_G = \vec{a}$ متجهة التسارع لمركز قصور الكرية

نسقط العلاقة المتجهية على المحور $(O,\vec{k})$ ، نحصل على المتساوية التالية :

$$m_{bille}g - m_f g - kv^n = m_{bille}.a$$

$$(m_b - m_f)g - kv^n = m_b.\frac{dv}{dt}$$

$$A = \frac{(m_b - m_f)}{m_b}g \qquad B = \frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

تمثل هذه المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الكرية خلال السقوط الرأسي في السائل

2 ـ تحديد المقادير المميزة للحركة

أ ـ النظام الدائم : السرعة الحدية للكرية

تبين التجربة أن v_ℓ

بحيث تصبح حركة الكرية حركة مستقيمية منتظمة أي أن : $\frac{dv}{dt} = 0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A - Bv_\ell^n = 0 \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell = \left(\frac{g}{k}(m_b - m_f)\right)^{\frac{1}{n}}$$

ـ عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية v_ℓ تخضع حركة G إلى نظام يسمى **النظام الدائم**

ويتميز بثبات السرعة .

ب ـ النظام البدئي

قبل تحرير الكرية فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم .

في اللحظة $t_0=0$

الرأسي للكرية وتتزايد سرعتة مركز قصورها : تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور

حركة G نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوة المطبقة على الكرية مرة أخرى منعدم : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

أي أن $a=0$.

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة $t_0=0$ لدينا $a_G(t_0=0) = a_O = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$ بحيث أن a_0 هو

التسارع البدئي لمركز القصور G للكرية . لدينا كذلك $\vec{f} = \vec{0}$

$$(m_b - m_f)g = m_b.a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{(m_b - m_f)g}{m_b}$$

مبيانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى

. $t_0=0$

ج ـ الزمن المميز للحركة

يتقاطع الخط المماس للمنحنى $v=f(t)$ مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها τ نسميه

الزمن المميز للحركة

تحدد قيمة τ بالعلاقة : $v_\ell = a_0\tau$

ملحوظة : تمكن قيمة τ من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

3 ـ حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

أ ـ مبدأ الطريقة

ـ تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض
بحيث نعلم أن

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\Rightarrow a(t)=\left(\frac{dv}{dt}\right)\approx\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t)=v(t)+a(t).\Delta t \qquad (1)$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية . كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة t والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية v_0 في اللحظة t=0 .

المرحلة الأولى :

من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي : $v(t_{i+1})=v(t_i)+a(t_i).\Delta t$ بحيث أن

$a_i=A-B.v_i^n$

عند اللحظة t=0 لدينا $a_0=A-Bv_0^n$

في المرحلة الثانية :

نحسب $v_1=v_0+a_0v_0^n\Delta t$

Δt تسمى خطوة الحساب

ونعيد حساب التسارع والسرعة الموالين بنفس الطريقة

ثم نبحث عن قيم n و A و B التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

VI ـ السقوط الرأسي الحر .

1 ـ تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط .

نظريا يكون السقوط حرا إذا تم قي الفراغ ،

عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .

2 ـ متجهة التسارع a_G لمركز القصور .

نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}=m.\vec{g}=m\vec{a}_G$ أي أن $\vec{g}=\vec{a}_G$

3 ـ المعادلة الزمنية للحركة

في المعلم $(O,\vec{k})$ الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على :

$a_z=g\Rightarrow\frac{dv_z}{dt}=g\Rightarrow v_z=gt+C$ نحدد الثابتة C بالشروط البدئية . نأخذ عند اللحظة $t_0=0$ أن

$v_G(t=0)=v_0=0$ أي أن $v_z=gt$ ونستنتج أن سرعة G دالة زمنية خطية .

بنفس الطريقة نبحث عن z(t) :

$v_z=\frac{dz}{dt}=gt\Rightarrow z(t)=\frac{1}{2}gt^2+C'$ ، نحدد كذلك الثابتة C′ بالشروط البدئية . نأخذ عند اللحظة t=0 أن

$z(0)=z_0=0$ وبالتالي فإن C′=0 أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة بدئية ومن النقطة O تم اختيارها كأصل معلم الزمن هي : $z(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

وهذه المعادلة نعممها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بدئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، **حركة مستقيمية متغيرة بانتظام** .

تمرين تطبيقي 1 :

I ــ تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بدئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 ــ ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟

2 ــ أجرد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟

3 ــ عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .

4 ــ أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي h=2m .

II ــ السرعة البدئية في اللحظة t=0 لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي $v_0=15,0m/s$

1 ــ اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى للمعلم المتعامد والممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2 ــ أوجد تعبير t_M تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى z_M للنقطة G ، واحسب قيمته .

3 ــ أحسب قيمة z_M .